МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О.М. Бекетова

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів та виконання контрольної роботи
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 3

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання

усіх спеціальностей)

Харків – ХНУМГ ім. О.М. Бекетова – 2015

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів та виконання контрольної роботи з дисципліни «Вища математика» Частина 3 (для студентів 2 курсу заочної форми навчання усіх спеціальностей) /Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова; уклад. Л.П. Вороновська, С.С. Шульгіна – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 75 с.

Укладачі: **Л. П. Вороновська**

С. С. Шульгіна

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Коваленко Л.Б.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.

протокол № 11 від 9.06.2015р.

РОЗДІЛ 1. КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Кратні інтеграли

1.1.1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

Подвійним інтегралом від неперервної функції *f*(*x*,*y*), поширеним на обмежену замкнену область (*D*) площини *x0y*, називають границю відповідної двовимірної інтегральної суми, тобто

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k ,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ і сума поширення на ті значення *i* та *к*, для яких точки x_i, y_k належать області (*D*).

Зауважимо, що *dxdy* = *ds* називають елементом площі в прямокутних координатах.

Відомо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (двократного) інтегралу, тобто до послідовного обчислення двох визначених інтегралів. Будемо розрізняти два основні види області інтегрування.

1. Область інтегрування (*D*) (рис.1) обмежена зліва і справа прямими *x* = *a* і *x* = *b* (*a* < *b*), а знизу і зверху - неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$, кожна із яких перетинається з прямою *x* = const лише один раз. Тут $y = \varphi_1(x)$ - нижня межа області (лінія входу), $y = \varphi_2(x)$ - верхня межа області (лінія виходу).

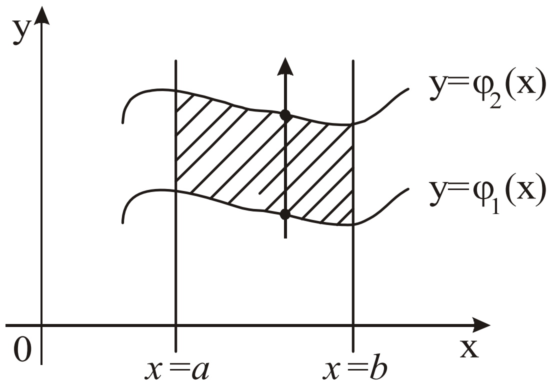


Рис. 1.

В області (*D*) змінна *x* змінюється від *a* до *b*, а змінна *y* при сталому *x* змінюється від $y = \varphi_1(x)$ до $y = \varphi_2(x)$.

Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

2. Область інтегрування (D) (рис. 2) знизу і зверху обмежена прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$), а зліва і справа - неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, кожна з яких перетинається з прямою $y = const$ лише один раз. Тут $x = \psi_1(y)$ - ліва межа області (лінія входу), $x = \psi_2(y)$ - права межа області (лінія виходу).

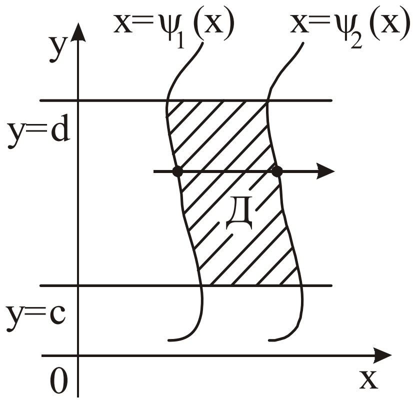


Рис. 2.

В області (D) змінна y змінюється від c до d, а змінна x при сталому y змінюється від $x = \psi_1(y)$ до $x = \psi_2(y)$. Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx .$$

Зауважимо, що коли границя області складається з декількох ліній входу або виходу, то область (D) розбивають на частини, кожна з яких має одну лінію входу і одну лінію виходу, і тоді інтеграл відносно області, наприклад, (D) = (D_1) + (D_2) розглядають як суму інтегралів відносно кожної з них, тобто

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)dxdy .$$

Обчислюючи подвійний інтеграл у прямокутних координатах, доцільно користуватися наступним правилом.

Правила обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

1.Побудувати область інтегрування (D) і перевірити, чи є вона правильною (прямі, паралельні осям координат, перетинають межу області не більше ніж в двох точках).

2. Обрати раціональний порядок інтегрування.

3. Перейти від подвійного інтеграла до повторного.

4. Розставити межі інтегрування в повторному інтегралі, пам’ятаючи, що межі зовнішнього інтеграла завжди сталі (це кінці інтервалу, що належить

осі Ox або осі Oy, на який проектується область (D)), а межі внутрішнього інтегралу є функціями тієї змінної, відносно якої береться зовнішній інтеграл.

5. Знайти внутрішній інтеграл, вважаючи сталою змінну зовнішнього інтеграла.

6. Обчислити зовнішній інтеграл від функції, отриманої у результаті знаходження внутрішнього інтеграла.

Зауважимо, що коли область інтегрування (D) – прямокутник, сторони якого паралельні осям координат то всі чотири межі інтегрування в повторному інтегралі сталі.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл:

$$\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx.$$

Розв'язання. Знаходимо внутрішній інтеграл, вважаючи y сталим.

$$\int_0^1 (x^2+2y)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2ydx=\int_0^1 x^2dx+2y\int_0^1 dx=\left(\frac{x^3}{3}+2yx\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+2y.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл від одержаної функції

$$\int_0^2 (\frac{1}{3}+2y)dy=\int_0^2\frac{1}{3}dy+\int_0^2 2ydy=\left(\frac{1}{3}y+y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}.$$

Таким чином,

$$\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx=4\frac{2}{3}.$$

Розв'язання цього прикладу інакше можна записати так:

$$\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx=\int_0^2\left(\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2ydx\right)dy=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)_0^1 dy=\int_0^2(\frac{1}{3}+2y)dy=$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3}dy+\int_0^2 2ydy=\left(\frac{1}{3}y+y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}$$

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}$.

Розв'язання. У даному інтегралі змінною внутрішнього інтеграла є y. Отже,

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int_1^2\left(x-x^3\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Побудувати область (D), обмежену лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, перейти від подвійного інтегралу, взятого відносно цієї області до повторного і розставити межі інтегрування.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис.3,*а*).

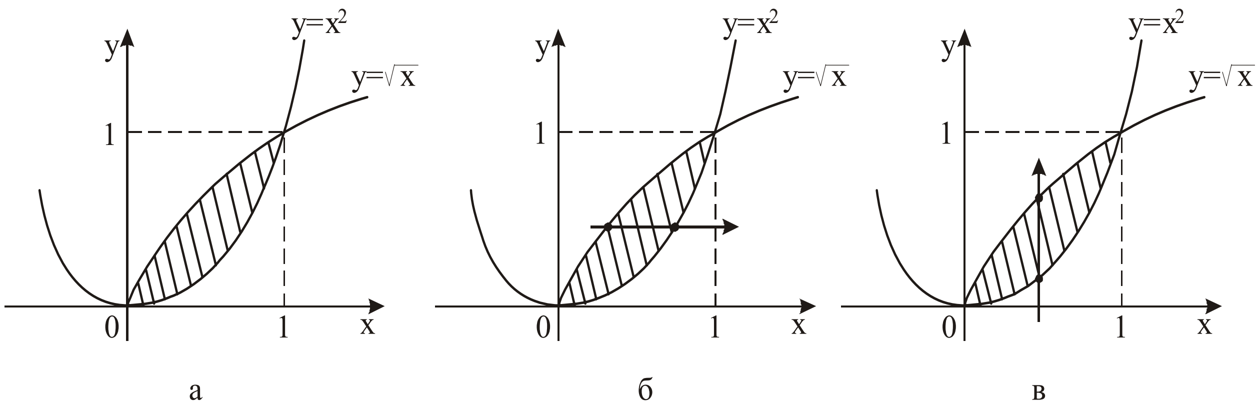


Рис.3.

Для вибору раціонального порядку інтегрування перетнемо область (D) прямими, паралельними осям координат (рис. 3,*б* – паралельними осі Ox, рис. 3,*в* – паралельними осі Oy). Так як у кожному випадку маємо по одній лінії входу і по одній лінії виходу, то порядок інтегрування можна обирати довільно і подвійний інтеграл відносно області (D) можна записати у вигляді одного повторного інтегралу.

$\int dy\int f(x,y)dx$ (див. рис. 3,*б*);

$\int dx\int f(x,y)dy$ (див. рис. 3,*в*).

Зауважимо, що підінтегральна функція $f(x,y)$ завжди записується під знак внутрішнього інтеграла.

Розставимо межі інтегрування в інтегралі $\int dy\int f(x,y)dx$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтегралу спроектуємо область (D) на вісь Oy $(0\le y\le 1)$. Межі внутрішнього інтегралу знайдемо із рівняння лінії входу $x = y^2$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x = \sqrt{y}$ (верхня межа інтегрування).

Таким чином, $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Далі розставимо межі в інтегралі $\int dx\int f(x,y)dy$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтегралу спроектуємо область (D) на вісь Ox

$(0 \le x \le 1)$. Межі внутрішнього інтегралу знаходимо з рівняння лінії входу $y = x^2$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $y = \sqrt{x}$ (верхня межа інтегрування).

Тоді $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

Приклад 4. Перейти від подвійного інтеграла, взятого відносно області (D), обмеженої лініями $y = 0$, $y = 2$, $y = x$ і $y = x - 4$, до повторного.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 4,*а*).

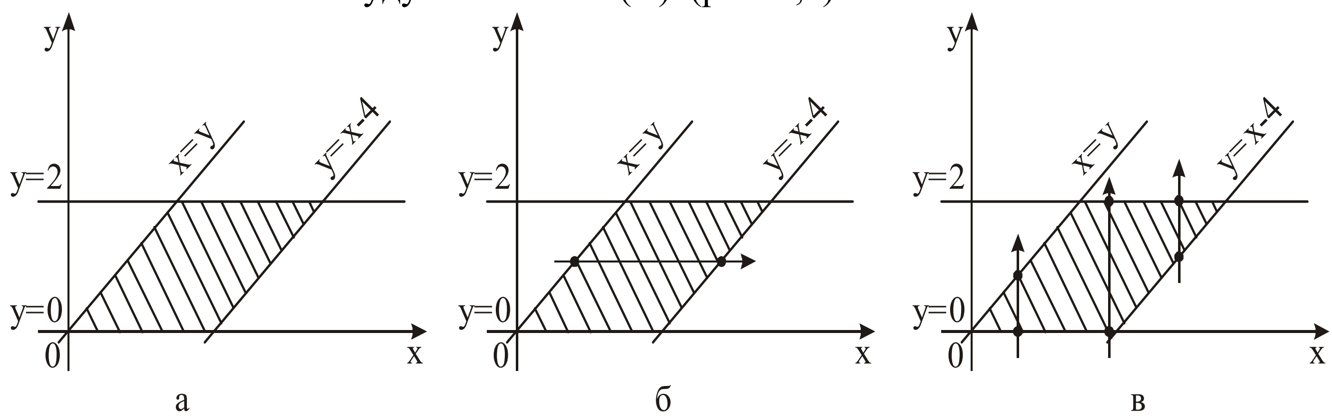


Рис. 4.

Для вибору раціонального порядку інтегрування перетнемо область інтегрування прямими, паралельними осям координат (рис. 4,*б* – паралельними осі *Ox,* рис. 4,*в* – паралельними осі *Oy*).

У першому випадку (рис. 4,*б*) маємо одну лінію входу $y = x$ і одну лінію виходу $y = x - 4$, тому подвійний інтеграл відносно області (D) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла виду

$$\int dy \int f(x,y)dx.$$

У другому випадку маємо дві лінії входу: $y = 0$ і $y = x - 4$ і дві лінії виходу: $y = x$ і $y = 2,$ тому область (D) розбиваємо на три частини (рис. 4,*в*) і тоді подвійний інтеграл відносно області (D) = (D_1) + (D_2) + (D_3) можна записати як суму подвійних інтегралів відносно кожної з них, тобто:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_3)} f(x,y)dxdy,$$

де кожний з одержаних інтегралів можна записати у вигляді одного повторного інтегралу виду $\int dx \int f(x,y)dy$.

Таким чином, зрозуміло, що порядок інтегрування буде раціональним у першому випадку, оскільки веде до обчислення меншої кількості повторних інтегралів і обчислення значно меншої кількості визначених інтегралів.

Розставимо межі інтегрування в повторному інтегралі $\int dy \int f(x,y)dx$.

Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроектуємо область (D) на вісь Oy $(0 \le y \le 2)$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо з рівняння лінії входу $x = y$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x = y + 4$ (верхня межа інтегрування).

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dy \int_y^{y+4} f(x,y)dx.$$

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. У даному повторному інтегралі порядок інтегрування наступний. Внутрішнє інтегрування виконується відносно змінної y, а зовнішнє – відносно змінної x. Змінити порядок інтегрування в даному інтегралі означає те, що внутрішнє інтегрування треба виконати відносно змінної x, а зовнішнє – відносно змінної y, тобто записати інтеграл у вигляді

$$\int dy \int f(x,y)dx.$$

Але, як показує попередній приклад, поки що не відомо, скільки таких інтегралів буде. Щоб відповісти на це питання, відновимо область (D). Оскільки змінна внутрішнього інтеграла - y, то рівняння нижньої межі області $y = 2x$ (лінія входу), а рівняння верхньої межі області $y = 6 - x$ (лінія виходу). Змінна x зовнішнього інтеграла змінюється від $x = 0$ до $x = 2$.

Таким чином, рівняння меж області: $y = 2x$, $y = 6 - x$, $x = 0$ і $x = 2$. Побудуємо область (D) (рис. 5).

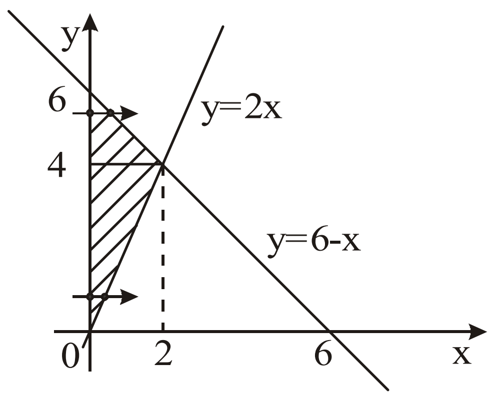


Рис. 5.

Перетнувши область (D) в напрямку осі Ox бачимо, що точки входу знаходяться на одній лінії $x = 0$, а точки виходу - на двох різних лініях $y = 2x$ і

$y = 6 - x$, тому область (D) доведеться розбити на дві частини (D_1) (нижня) і (D_2) (верхня).

Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx .$$

Приклад 6. Змінюючи порядок інтегрування, записати вираз

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$$

у вигляді одного двократного інтеграла.

Розв'язання. Запишемо рівняння меж області (D):

$$\left\{ x = 0; x = 1; x = 3; y = 0; y = x^2; y = \frac{1}{2}(3-x) \right\}.$$

Побудуємо область (D) = (D_1) + (D_2) (рис. 6).

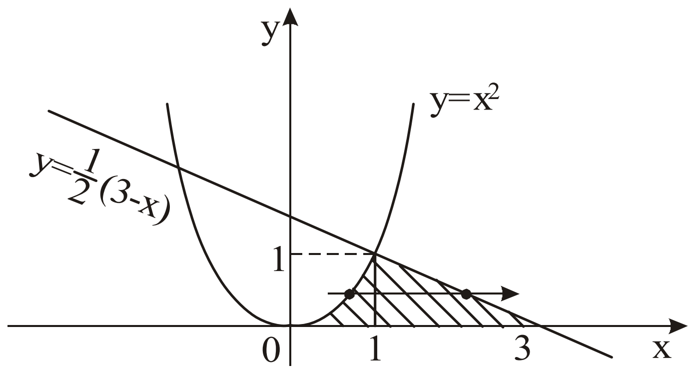


Рис. 6.

Дійсно, в області (D_1) (ліва межа) $(0 \le x \le 1)$, $(0 \le y \le x^2)$, а в області (D_2) (права межа) $(1 \le x \le 3)$, $\left(0 \le y \le \frac{1}{2}(3-x)\right)$.

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Ox бачимо, що лінія входу одна - $y = x^2$ і лінія виходу одна - $y = \frac{1}{2}(3-x)$, а тому при зміні порядку інтегрування одержимо один двократний інтеграл виду:

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

Розставимо межі інтегрування. Змінна, що стоїть поряд з y зовнішнім інтегралом змінюється від 0 до 1, оскільки область (D) проектується на вісь Oy у відрізок [0;1]. Змінна x внутрішнього інтегралу змінюється від $x = \sqrt{y}$ (лінія входу) до $x = 3 - 2y$ (лінія виходу).

Таким чином,

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx\,.$$

Приклад 7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x^2+y)dxdy$ в області (D), обмеженої лініями $y=x^2$ і $y^2=x$.

Розв'язання. Перейдемо до повторного інтегралу (див. рис. 3,*а*) і обчислимо його. Тоді

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y\right)dx=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}}x^2dx+\int_{y^2}^{\sqrt{y}}ydx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^6}{3}-y^3\right)dy=\int_0^1\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^6}{3}-y^3\right)dy=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^7}{21}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{15}-\frac{1}{21}-\frac{1}{4}=\frac{224-20-105}{420}=\frac{99}{420}=\frac{33}{140}.$$

Або (див. рис. 3,*в*):

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$

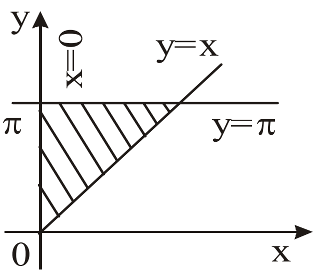
$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{80+70-84}{280}=\frac{66}{280}=\frac{33}{140}.$$

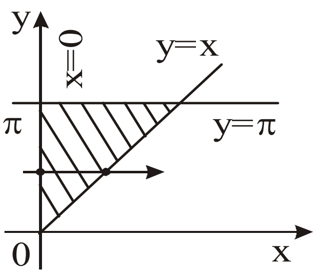
Як бачимо, результати обчислень в кожному випадку однакові.

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}\cos(x+y)dxdy$ в області (D), обмеженої лініями $x=0,\ y=\pi$ і $y=x$.

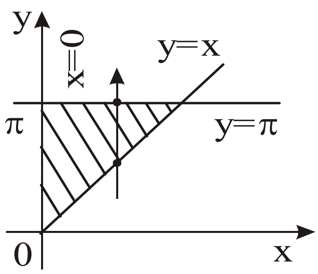
Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 7,*а*):



а



б



в

Рис. 7.

Із рис. 7,*б* і рис. 7,*в* бачимо, що подвійний інтеграл в області (*D*) можна записати у вигляді одного повторного інтегралу незалежно від того, в якому порядку буде виконуватись інтегрування в повторному інтегралі. Однак, враховуючи, що межі внутрішнього інтеграла будуть простішими у випадку, зображеному на (рис. 7,*б*), обчислення подвійного інтеграла раціонально виконати так:

$$\iint_{(D)} \cos(x+y)dxdy = \int_0^{\pi} dy \int_0^{y} \cos(x+y)dx = \int_0^{\pi} \sin(x+y)\Big|_0^{y} dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin 2y - \sin y)dy = \left(-\frac{1}{2}\cos 2y + \cos y\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 = -2$$

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Якщо область інтегрування (*D*) (рис. 8) обмежена двома променями, що виходять з полюса $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, і двома кривими $r = r_1(\varphi)$ і $r = r_2(\varphi)$, де $r_1(\varphi)$ і $r_2(\varphi)$ – однозначні функції при $\alpha \le \varphi \le \beta$ і $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_{(D)} F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr,$$

причому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл, тобто

$$\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr,$$

в якому φ вважається сталою.

Відзначимо, що коли полюс належить області (*D*), то $r_1(\varphi) = 0$.

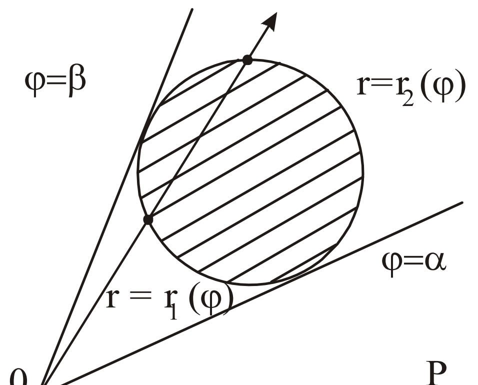


Рис. 8.

Правила обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

1. Побудувати область інтегрування (D).
2. Замінити змінні *x* і *y*, від яких залежить підінтегральна функція на $r\cos\varphi$ і $r\sin\varphi$ відповідно, а елемент площі $dxdy$ на $rdrd\varphi$.

3. Перейти до повторного інтегралу, пам’ятаючи при цьому, що зовнішній інтеграл завжди береться за змінною φ, а внутрішній - за змінною r.

4. Розставити межі інтегрування. Для цього перевести рівняння межі області в полярну систему координат і визначити границі зміни полярного кута φ і полярного радіуса r в області (D).

5. Виконати обчислення.

Зауважимо, що перехід в подвійному інтегралі до полярних координат виконують, як правило, в тому випадку, коли область інтегрування (D) є круг або його частини.

Приклад 9. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr$.

Розв’язання. Обчислюючи спочатку внутрішній інтеграл, потім, інтегруючи одержану функцію, зовнішній, знаходимо

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{a\sin\varphi}^{a} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2 - a^2\sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, де ($D$) – частина круга радіуса a з центром у точці O(0;0), яка розташована в першій чверті.

Розв’язання. Побудуємо область (D) (рис. 9).

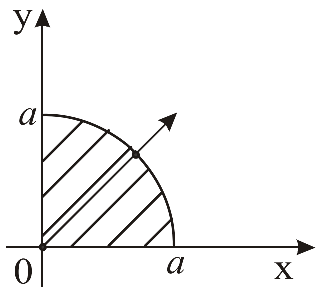


Рис. 9.

При переході до полярних координат у подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - \left(x^2 + y^2\right)}} = \iint\limits_{(D)} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Далі, переходячи від подвійного інтеграла в полярних координатах відносно області (D) до повторного і, враховуючи, що в області (D) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le r \le a$, будемо мати

$$\iint_{(D)} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2}\Bigg|_0^a d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - a) d\varphi = a\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{2}.$$

Приклад 11. Обчислити $\iint_{(D)} arctg\frac{y}{x} dxdy$, де ($D$) – частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 10):

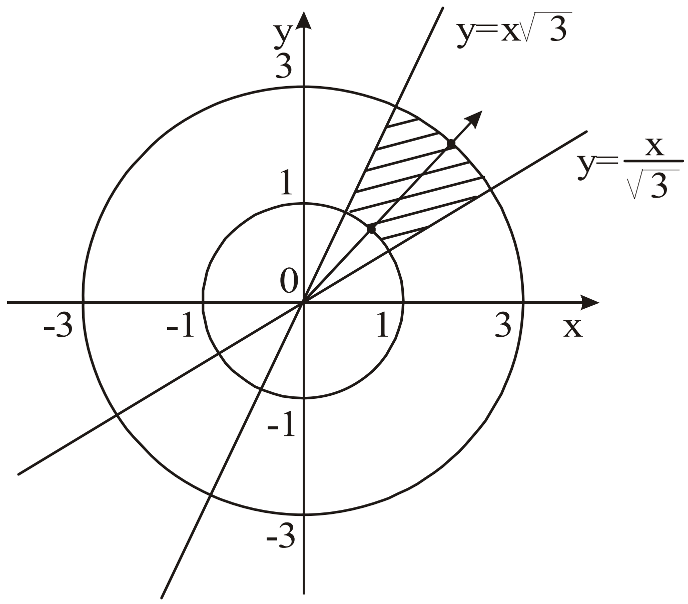


Рис. 10.

Переходячи до полярних координат в подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint_{(D)} arctg\frac{y}{x} dxdy = \iint_{(D)} arctgtg\varphi \cdot rdrd\varphi = \iint_{(D)} \varphi rdrd\varphi.$$

Далі здійснимо перехід до повторного інтегралу, одержимо

$$\iint_{(D)} \varphi rdrd\varphi = \int \varphi d\varphi \int rdr.$$

Для розстановки меж інтегрування в повторному інтегралі переведемо рівняння меж області в полярну систему координат.

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2=1,\ r=1;$$
$$x^2+y^2=9 \Rightarrow r^2=9,\ r=3;$$
$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi=\frac{\pi}{6};$$
$$y=x\sqrt{3} \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3} \Rightarrow tg\varphi=\sqrt{3},\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)}\varphi r dr d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_{1}^{3} r dr=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi\cdot\left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi(9-1)d\varphi=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi=4\cdot\left.\frac{r^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x}dxdy=\iint\limits_{(D)}\varphi r dr d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_{1}^{3} r dr=\frac{\pi^2}{6}.$$

Зауважимо, що оскільки в повторному інтегралі $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_{1}^{3} r dr$ всі чотири межі інтегрування сталі і кожний з інтегралів (внутрішній і зовнішній) залежить лише від однієї змінної, то обчислювати їх можна було б незалежно один від одного, тобто

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_{1}^{3} r dr=\left.\frac{\varphi^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)\cdot(9-1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}\cdot 8=\frac{\pi^2}{6}.$$

1.1.3. Застосування подвійного інтеграла для розв’язання задач геометрії і механіки

Табл. 1.

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Площа плоскої фігури	$S=\iint\limits_{(D)} dxdy$ (1)	$S=\iint\limits_{(D)} rdrd\varphi$ (1,а)
Об’єм циліндричного тіла	$V=\iint\limits_{(D)} z(x,y)dxdy$ (2)	$V=\iint\limits_{(D)} z(r,\varphi)rdrd\varphi$ (2,а)
Маса плоскої фігури	$m=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)dxdy$ (3)	$m=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)rdrd\varphi$ (3,а)
Статичні моменти плоскої фігури, відносно осей координат	$M_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)ydxdy$ (4) $M_y=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)xdxdy$ (5)	$M_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi$ (4,а) $M_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^2\cos\varphi drd\varphi$ (5,а)
Моменти інерції плоскої фігури, відносно осей координат і початку координат	$I_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)y^2dxdy$ (6) $I_y=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)x^2dxdy$ (7) $I_0=\iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)(x^2+y^2)dxdy$ (8)	$I_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3\sin^2\varphi drd\varphi$ (6,а) $I_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3\cos^2\varphi drd\varphi$ (7,а) $I_x=\iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3drd\varphi$ (8,а)
Координати центра ваги плоскої фігури	$x_c=\frac{M_y}{m}$ (9) $y_c=\frac{M_x}{m}$ (10)	–

Зауважимо, що коли плоска фігура однорідна, то $\gamma(x,y)$=const, якщо нема відповідних значень в постановці задачі, то її приймають рівною одиниці.

Розв'язання задач

Задача 1. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і $x = 4$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену даними лініями, тобто область (D) (рис. 11). Її площу обчислимо за формулою 1, (табл. 1), згідно з якою

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy$$

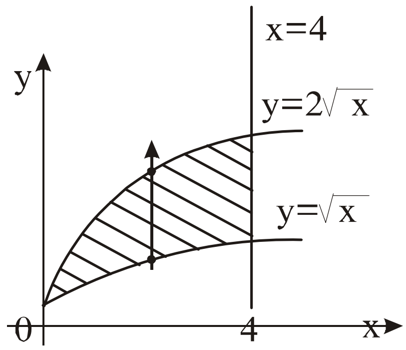


Рис. 11.

Переходячи до повторного інтегралу й обчислюючи його, одержимо:

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

Задача 2. Обчислити подвійним інтегруванням площу області, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемніската Бернуллі).

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що заміна x на $-x$ і y на $-y$ не змінює рівняння кривої. А це свідчить про те, що крива розташована симетрично відносно координатних осей. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, враховуючи симетрію її відносно координатних осей, побудувати її в трьох інших четвертях.

Для побудови кривої запишемо її рівняння в полярній системі координат, поклавши $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Виконуючи перетворення, одержимо:

$$\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right);$$
$$\left(r^2\right)^2 = 2a^2r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right);$$
$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi;$$
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Оскільки полярний радіус r може набувати лише дійсних значень, то $\cos 2\varphi$ в одержаному рівнянні не може бути від'ємним, тобто $\cos 2\varphi \ge 0$.

Це означає, що кут 2φ повинен знаходитись або в першій, або в четвертій чверті. З'ясувавши, що досить побудувати криву лише в першій чверті, розглянемо значення 2φ, яке задовольняє умові $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що для побудови кривої в першій чверті, куту φ необхідно надавати значень від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Крива зображена на рис. 12.

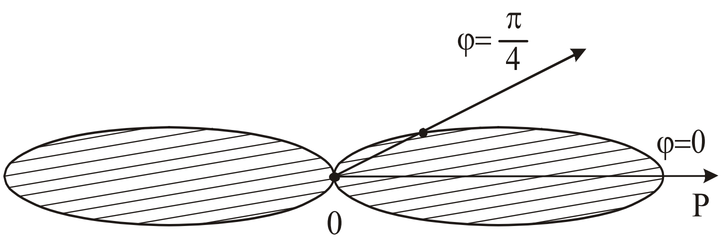


Рис. 12

Площу фігури, обмеженої даною лінією, обчислимо за формулою 1,*а* (табл.):

$$S = \iint\limits_{(D)} r dr d\varphi .$$

Переходячи до повторного інтеграла і враховуючи симетрію фігури, відносно осей координат, одержимо:

$$S = \iint\limits_{(D)} r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2a^2.$$

Задача 3. Обчислити подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого треба обчислити, обмежене знизу площиною $z = 0$, з боків площинами $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 1$ і зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$.

Отже, це циліндричне тіло (рис. 13,*а*).

Проекцією тіла на площину *xOy* є область (*D*) (рис. 13,*б*). Згідно з формулою 2, (табл.) об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_{(D)} z dx dy ,$$

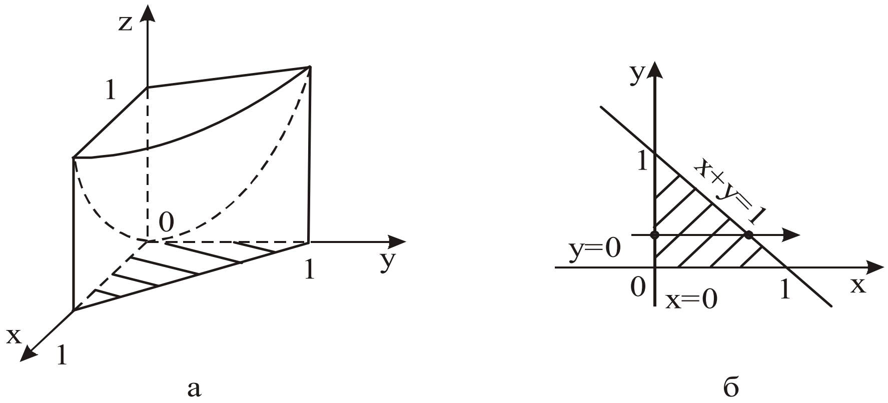


Рис. 13.

де $z = f(x, y)$ - рівняння поверхні, яка обмежує тіло зверху. У нашому випадку

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

і задача зводиться до обчислення подвійного інтеграла відносно області (D).

Виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} \left(x^2 + y^2\right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Bigg|_0^{1-y} dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y^2 - y^3\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Задача 4. Обчислити подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $z = 4 - x^2$, координатними площинами і площиною $2x + y = 4$ ($x \ge 0$).

Розв'язання. Побудувавши тіло (рис.14), переконуємося, що воно циліндричне.

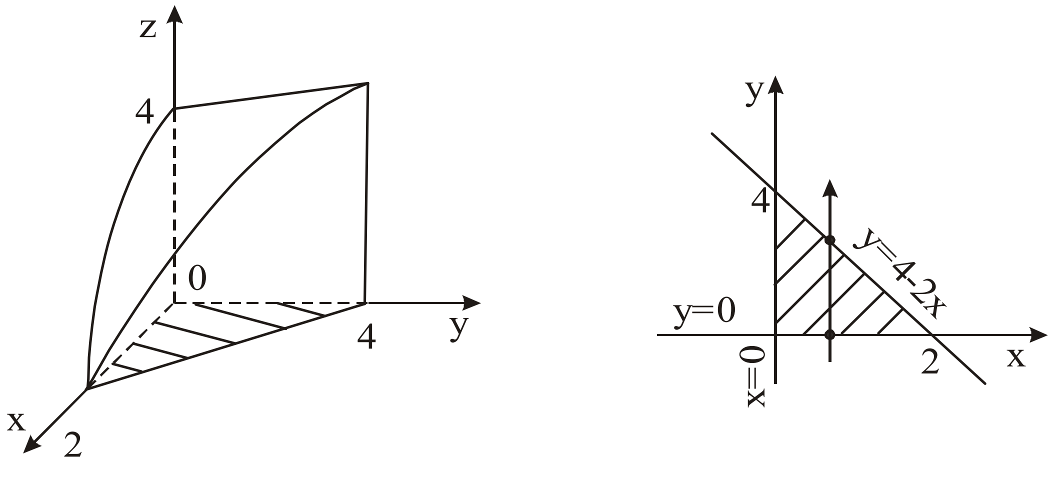


Рис. 14.

Проекцією тіла на площину xOy є область (D) (рис. 14,*б*). Згідно з формулою 2, (табл. 1), об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою

$$V=\iint\limits_{(D)} z\,dxdy\,.$$

Оскільки зверху тіло обмежене поверхнею $z=4-x^2$, то

$$V=\iint\limits_{(D)}\left(4-x^2\right)dxdy\,.$$

Обчислення будуть простішими, якщо інтегрування в повторному інтегралі виконувати в такому порядку, як показано на рис. 14,*б*.

Отже,

$$V=\iint\limits_{(D)}\left(4-x^2\right)dxdy=\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)dx\int\limits_0^{4-2x}dy=\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)\left(4-2x\right)dx=2\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)\left(2-x\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(8-4x-2x^2+x^3\right)dx=2\left(8x-2x^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=2\left(16-8-\frac{16}{3}+4\right)=13\frac{1}{3}.$$

Задача 5. Обчислити подвійним інтегруванням об’єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=2x$ і площинами $2x-z=0$ і $4x-z=0$.

Розв’язання. Побудуємо тіло (рис. 15,*а*). Його проекцією на площину *xOy* є область (*D*) (рис. 15,*б*).

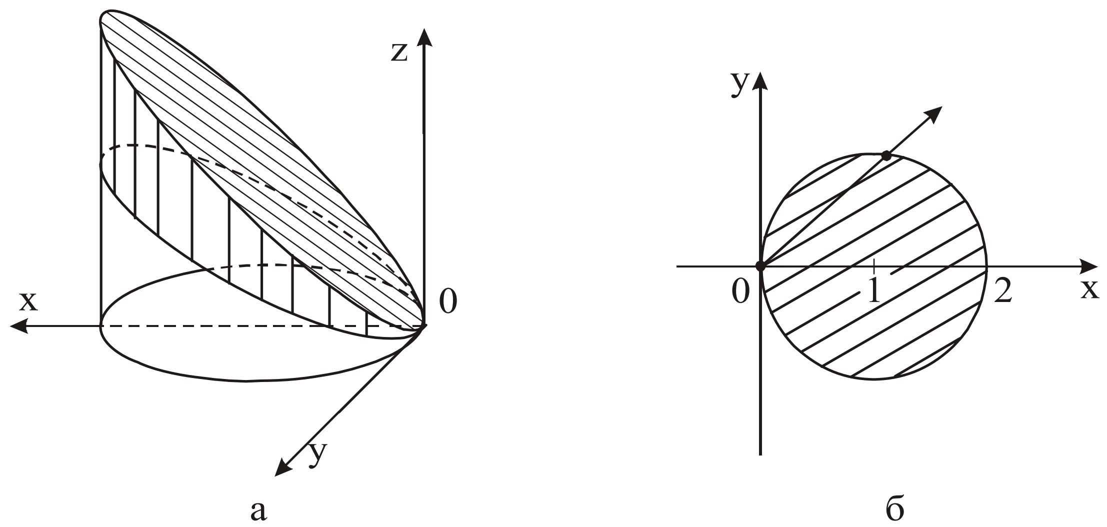


Рис. 15.

Переконаємося в тому, що тіло не є циліндричним, бо знизу обмежене площиною $2x-z=0$, а тому застосувати безпосередньо формулу 2, (табл. 1), для обчислення його об’єму не можна. Однак не важко зрозуміти, що шуканий об’єм буде дорівнювати різниці об’ємів двох циліндричних тіл, одне з яких обмежене зверху поверхнею $4x-z=0$, а друге - поверхнею $2x-z=0$.

Тоді

$$V=\iint\limits_{(D)}\left(z_в-z_н\right)dxdy=\iint\limits_{(D)}\left(4x-2x\right)dxdy=2\iint\limits_{(D)}x\,dxdy\,.$$

Оскільки область інтегрування (*D*) є круг, то доцільно перейти до полярних координат.

Внаслідок чого будемо мати

$$V = 2\iint\limits_{(D)} r^2 \cos\varphi dr d\varphi .$$

Межа області (D) в полярних координатах набуде вигляду $r = 2\cos\varphi$. Переходячи тепер від подвійного інтеграла до повторного і виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cos\varphi dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Отже, шуканий об’єм $V = 2\pi$.

Задача 6. Обчислити масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.

Розв’язання. Квадратну пластинку в системі xOy зручно розташувати таким чином, щоб точка перетину діагоналей квадрата співпала з початком координат, а сторони були паралельні осям координат (рис. 16).

Для обчислення маси пластинки скористаємося формулою 3, (табл. 1), згідно з якою маса плоскої фігури

$$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(x, y) dx dy .$$

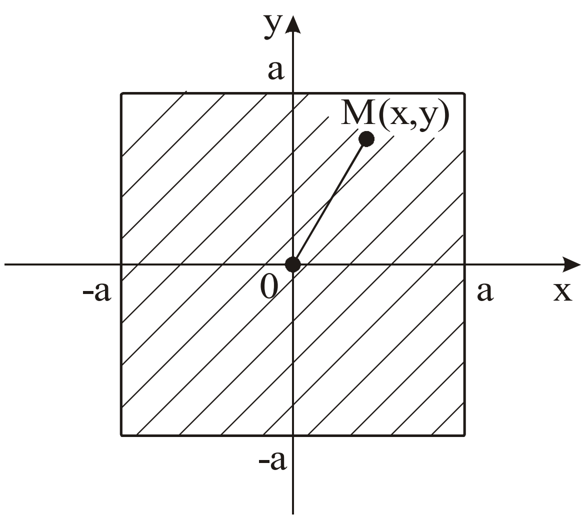


Рис. 16.

За умовою задачі поверхнева густина $\gamma(x, y) = kd^2 = k\left(x^2 + y^2\right)$.

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови, що на кутах квадрата $\gamma = 1$, а $d = a\sqrt{2}$. Тоді $1 = k \cdot 2a^2$, звідки $k = \dfrac{1}{2a^2}$ і $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{2a^2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Таким чином,

$$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(x, y)dxdy = \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{(D)}\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-a}^{a}\left(x^2 + y^2\right)dy .$$

Враховуючи симетрію фігури відносно координатних осей, остаточно будемо мати:

$$m = 4 \cdot \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a\left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a\left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left(a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \cdot x\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) = \frac{4a^2}{3}.$$

Задача 7. Обчислити статичний момент однорідного півкруга з радіусом R відносно діаметра.

Розв’язання. **1-й спосіб**. Так як нам відомі формули для обчислення статичних моментів плоскої фігури відносно осей координат (формули 4 і 5, табл. 1), то в системі xOy півкруг зручно розташувати таким чином, щоб його діаметр співпадав з однією із осей координат, наприклад Ox, а центр з початком координат (рис. 17). У цьому випадку область (D) буде обмежена лініями, рівняння яких $y = 0$ і $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

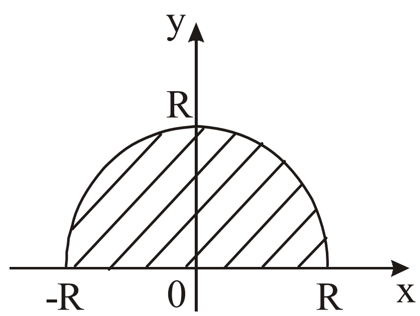


Рис. 17.

Тоді, враховуючи однорідність фігури і її симетрію відносно осі Oy, одержимо:

$$M_x = \iint\limits_{(D)} ydxdy = \int\limits_{-R}^{R} dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} ydy = 2\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} ydy = 2\int\limits_0^R \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^R\left(R^2 - x^2\right)dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R^3.$$

2-й спосіб. Оскільки область інтегрування (D) являє собою частину круга, то обчислення інтеграла можна було б виконувати і в полярних координатах. У силу формули 4,*а*, (табл. 1) і однорідності фігури

$$M_x = \iint\limits_{(D)} r^2 \sin\varphi dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{R} = \frac{R^3}{3}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{2R^3}{3}$$

.

Задача 8. Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$, віссю Ox і прямою $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 18).

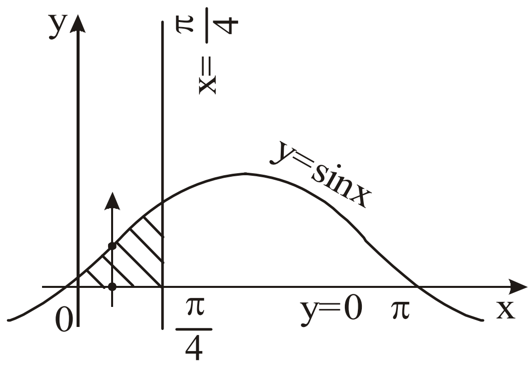


Рис. 18.

Розв'язання. За формулами 9 і 10 (табл. 1)

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо насамперед m, M_x і M_y, скориставшись відповідно формулами 3, 4, 5, (табл. 1), і враховуючи, що $\gamma(x, y) = 1$ в силу однорідності фігури.

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Oy, бачимо, що $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \sin x$.

Тоді

$$m = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} y\Bigg|_0^{\sin x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

$$M_x = \iint\limits_{(D)} ydxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} ydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - 2}{16}.$$

$$M_y=\iint\limits_{(D)}xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x; & du=dx\\ dv=\sin xdx; & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx=$$

$$=\left(-x\cos x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}.$$

Отже,

$$x_c=\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{4-\pi}{4(\sqrt{2}-1)}=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}+1\right);$$

$$y_c=\frac{\pi-2}{16}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{\pi-2}{8(2-\sqrt{2})}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+2\right).$$

Задача 9. Обчислити момент інерції однорідного рівнобедреного трикутника з основою *a* і висотою *h* відносно вершини.

Розв'язання. У даній задачі треба знайти момент інерції плоскої фігури відносно точки, тому трикутник слід розташувати в системі *xOy* таким чином, щоб його вершина співпадала з початком координат.

Тоді в силу однорідності фігури і формули 8 (табл. 1)

$$I_0=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy\,.$$

Якщо висоту трикутника сумістити з однією з осей координат, наприклад, з *Ox* (рис. 19), то рівняння меж області будуть мати найпростіший вигляд:

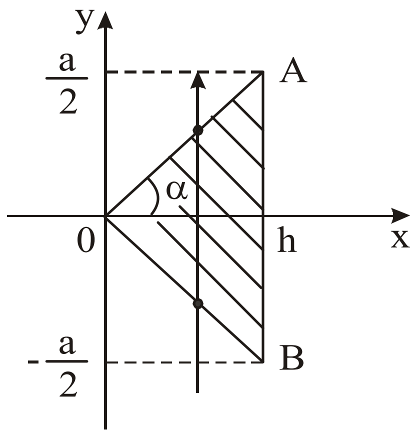


Рис. 19.

OA: $y=kx,\quad де\quad k=tg\alpha=\frac{a}{2h},\quad тобто\quad y=\frac{a}{2h}x\,.$

OB: $y=-\frac{a}{2h}x\,.$

AB: $x=h\,.$

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Oy, бачимо, що змінна x змінюється від 0 до h, а змінна y змінюється від $-\frac{a}{2h}x$ до $\frac{a}{2h}x$.

Тоді

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^h dx \int_{-\frac{a}{2h}x}^{\frac{a}{2h}x} (x^2 + y^2)dy,$$

а, враховуючи симетрію фігури відносно осі Ox,

$$I_0 = 2\int_0^h dx \int_0^{\frac{a}{2h}x} (x^2 + y^2)dy = 2\int_0^h \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2h}x} dx = 2\int_0^h \left(\frac{a}{2h}x^3 + \frac{a^3}{24h^3}x^3 \right)dx =$$

$$2\left(\frac{a}{2h} + \frac{a^3}{24h^3} \right)\int_0^h x^3 dx = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right)\cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^h = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right)\cdot \frac{h^4}{4} = \frac{ah\left(12h^2 + a^2\right)}{48}.$$

1.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Інтеграли виду:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

називаються криволінійними інтегралами другого роду.

1.2.1. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів. Розглянемо наступні випадки:

а) Якщо крива L, по якій обчислюється криволінійний інтеграл, задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t); y = \psi(t); (\alpha \le t \le \beta)$, де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, а також їх похідні $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ – неперервні функції t, то обчислення криволінійного інтегралу виконується за формулою

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt.$$

б) Якщо крива L, по якій обчислюється криволінійний інтеграл - лінія простору, задана параметричними рівняннями $x = x(t);$ $y = y(t); z = z(t);$ $(\alpha \le t \le \beta)$, де функції $x(t), y(t)$ і $z(t)$, а також їх похідні $x'(t)$ $y'(t)$і $z'(t)$ – неперервні функції t, то обчислення криволінійного інтегралу виконується за формулою

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}dt.$

в) Якщо крива L задана явно рівнянням $y=f(x); (a\le x\le b)$, де $f(x)$ – неперервна функція, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,f(x)]+Q[x,f(x)]f'(x)\}dx.$$

г) Якщо крива L задана явно рівнянням $x=\varphi(y); (c\le y\le d)$, де $\varphi(y)$ – неперервна функція, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}dy.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$$

де L - дуга параболи $y=x^2$, від точки A(-1,1) до точки B(2,4).

Розв'язання. В даному прикладі дуга L - парабола $y=x^2$, похідна цієї функції $y'=2x$. Межі інтегрування – абсциси точок А і В - $a=-1, b=2$. Таким чином, можемо записати:

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^{2}((x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)2x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^2-2x^3-4x^4+2x^5)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{3}x^6\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{3}(8+1)-\frac{1}{2}(16-1)-\frac{4}{5}(32+1)+\frac{1}{3}(64-1)=-9\frac{9}{10}=-9{,}9.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}},$$

де L - дуга астроїди $x=R\cos^3 t,\ y=R\sin^3 t$, від точки $A(R,0)$ до точки $B(0,R)$.

Розв'язання. Визначмо границі інтегрування для параметра t, для цього розглянемо абсциси точок A і B:

$R=R\cos^3,\qquad \cos t=1,\qquad t_н=0;\qquad 0=R\cos^3 t,\qquad \cos t=0,\qquad t_в=\frac{\pi}{2}.$

Визначимо диференціали dx, dy:

$dx=3R\cos^2 t(-\sin t)dt,\ \ dy=3R\sin^2 t\cos t dt.$

Таким чином,

$$\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}=\int_0^{\pi/2}\frac{R^2\cos^6 t\cdot 3R\sin^2 t\cos t dt+R^2\sin^6 t\cdot 3R\cos^2 t\sin t\,dt}{(R\cos^3 t)^{5/3}+(R\sin^3 t)^{5/3}}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{3R^3\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^5 t+\sin^5 t)}{R^{5/3}(\cos^5 t+\sin^5 t)}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}R^{4/3}\sin^2 2t dt=$$

$$= \frac{3}{4}R^{4/3}\int_0^{\pi/2} \frac{1-cos4t}{2}dt = \frac{3}{8}R^{4/3}\left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} cos4tdt\right) =$$

$$= \frac{3}{8}R^{4/3}\left(t\left|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}sin4t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{16}R^{4/3} = \frac{3\pi}{16}R\sqrt[3]{R}.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L 2xydx + y^2dy + z^2dz,$$

де L - дуга одного витка гвинтової лінії $x = cos\,t, y = sin\,t, z = 2t;$ від точки $A(1,0,0)$ до точки $B(1,0,4\pi)$.

Розв'язання. Знайдемо $dx = -sin\,t\,dt; dy = cos\,t\,dt; dz = 2\,dt.$ Границі інтегрування - $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$ (визначали аналогічно попередньому прикладу).

Отже,

$$\int_L 2xydx + y^2dy + z^2dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2cos\,t\,sin\,t\,(-sin\,t)\,dt + sin^2t\,cos\,t\,dt + 4t^2\cdot 2\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (8t^2 - sin^2t\,cos\,t)dt = 8\int_0^{2\pi} t^2dt - \int_0^{2\pi} sin^2t\,cos\,tdt =$$

$$= \frac{8}{3}t^3\left|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} sin^2t\,cos\,tdt = \left|\begin{matrix} U = sin\,t;\,dU = cos\,t\,dt; \\ U_н = 0;\ U_в = 0. \end{matrix}\right| = \frac{16}{3}\pi^3.\right.$$

1.2.2. Формула Гріна

У загальному випадку значення криволінійного інтеграла залежить від форми шляху інтегрування (тобто від кривої L) і від початкової та кінцевої точок цього шляху. Але в деяких випадках криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Сформулюємо (без доведення) теорему, яка вказує необхідну і достатню умови, незалежності криволінійного інтегралу від форми шляху інтегрування.

Теорема. Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені та неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій області D, то, для того, щоб криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цієї області виконувалася умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Криволінійний інтеграл по простому замкненому гладкому контуру L, який обмежує область D, може бути перетворений в подвійний інтеграл по області D, обмеженої цим контуром.

Це перетворення виконується за формулою Гріна

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Передбачається, що функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D і на контурі L, який її обмежує, причому контур L пробігається в додатному напрямі, (проти ходу годинникової стрілки).

Приклад . Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$$

де L - контур правої половини кола $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ від точки $A(1,1)$ до точки $C(1,3)$ та його діаметра.

Розв’язання. Згідно з формулою Гріна

$$P(x,y) - 2(x^2+y^2),\ Q(x,y) - (x+y)^2.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y;\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y).$$

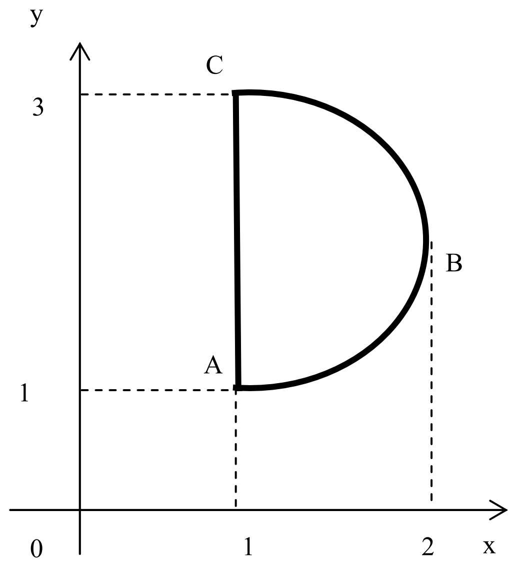


Рис. 20.

На рис. 20 зображений контур ABC. ABC – дуга круга $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, її рівняння $x=\sqrt{1-(y-2)^2}+1$. AC – діаметр, його рівняння $x=1$.

Використовуючи формулу Гріна, отримаємо:

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \iint_D (2(x+y)-4y)\,dxdy.$$

Обчислюючи подвійний інтеграл, знайдемо значення криволінійного інтегралу по замкненому контуру L:

$$\iint_D (2(x+y)-4y)dxdy = \int_1^3 dy \int_1^{\sqrt{1-(y-2)^2}+1} (2x-2y)dx =$$

$$= \int_1^3 (x^2 - 2xy)\Big|_{1}^{\sqrt{1-(y-2)^2}+1} dy =$$

$$= \int_1^3 \left(\left(\sqrt{1-(y-2)^2}+1\right)^2 - 1 - 2y\sqrt{1-(y-2)^2}\right) dy =$$

$$= \int_1^3 \left(1-(y-2)^2 + 2\sqrt{1-(y-2)^2} - 2y\sqrt{1-(y-2)^2}\right) dy =$$

$$= \int_1^3 dy - \int_1^3 (y-2)^2 dy + 2\int_1^3 (1-y)\sqrt{1-(y-2)^2} dy =$$

$$= y\Big|_1^3 - \frac{1}{3}(y-2)^3\Big|_1^3 + 2I = 3 - 1 - \frac{1}{3}(1+1) + 2I = \frac{4}{3} + 2I.$$

В останньому інтегралі виконаємо підстановку:

$$y-2 = \sin t;\ dy = \cos t\,dt;\ y_н = -\frac{\pi}{2};\ y_в = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t - 2)\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot\sin t\,dt.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо:

1) $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\cdot\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} U = \cos t;\ dU = -\sin t\,dt \\ U_н = 0;\ U_в = 0 \end{matrix}\right| = 0.$

Таким чином, маємо

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \frac{4}{3} - \pi.$$

1.2.3. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина задовольняє умові

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл такого рівняння може бути знайдений за формулою:

$$\int_a^x P(x,b)dx + \int_b^y Q(x,y)dy = C,$$

де a і b обираються довільно з урахуванням ОВФ для функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$.

Приклад. Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $U(x,y)$. Знайти функцію $U(x,y)$.

$$\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy.$$

Розв'язання. Виберемо довільно початкову точку інтегрування з урахуванням ОВФ функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – це точка (2,1).

$$P(x,y)=\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x},\qquad Q(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Знайдемо $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y(x-y)^2-y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2x(x-y)^2+x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже даний вираз є повним диференціалом. Знайдемо функцію $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int_2^x\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\int_1^y\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy+C=$$

(при інтегруванні другого інтегралу по змінній y, x вважаємо константою)

$$=-\frac{1}{x-1}\Big|_2^x-\ln x\Big|_2^x+\ln y\Big|_1^y-\frac{x^2}{x-y}\Big|_1^y+C=$$

$$=-\left(\frac{1}{x-1}-1\right)-(\ln x-\ln 2)+(\ln y-\ln 1)-x^2\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-1}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{x-1}+1-\ln x+\ln 2+\ln y-\frac{x^2}{x-y}+\frac{x^2}{x-1}+C=[C_1=C+1+\ln 2]$$

$$=\ln\frac{y}{x}+\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x^2}{x-y}+C_1=\ln\frac{y}{x}-\frac{x^2}{x-y}+x+1+C_1=[C_2=C_1+1]=$$

$$=\ln\frac{y}{x}-\frac{x^2}{x-y}+x+C_2=\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}+C_2.$$

$$U(x,y)=\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}+C_2.$$

Зробимо перевірку отриманої функції. Для цього знайдемо $\frac{\partial U}{\partial x}$ та $\frac{\partial U}{\partial y}$, якщо

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)\ \text{ та }\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y),$$

то функція знайдена вірно.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{(x-y)^2}=P(x,y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x(x-y)+xy}{(x-y)^2}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}=Q(x,y).$$

Отже

$$U(x,y)=\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}+C_2.$$

1.2.4. Застосування криволінійних інтегралів другого роду

За допомогою криволінійних інтегралів другого роду обчислюють площу плоскої фігури, обмеженої кусочно-гладкою кривою L

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

Робота силового поля при переміщенні матеріальної точки по кривій L виражається криволінійним інтегралом

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – проекції сил поля на осі координат.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ та прямою, яка проходить через точку $O(0,0)$ та точку $A(2,4)$.

Розв'язання: Область D, яка обмежена вказаними лініями, має вигляд (рис. 21)

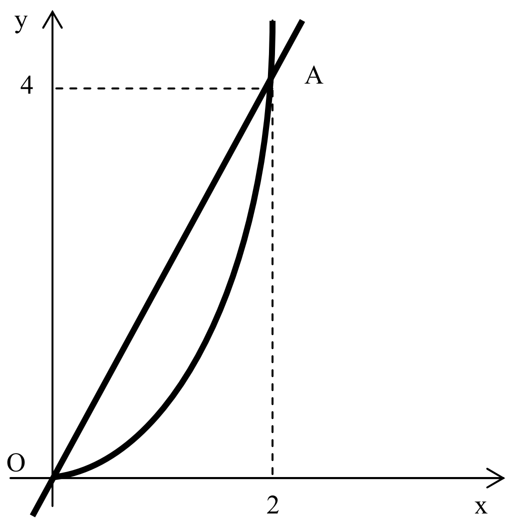


Рис. 21.

1. Обчислимо криволінійний інтеграл за дугою AB параболи $y = x^2$,

$$dy = 2xdx.$$

$$\int_0^2 x\cdot 2xdx - x^2dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

2. Обчислимо криволінійний інтеграл по прямій AB. Для цього запишемо рівняння прямої AB за формулою:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-0}{2-0};\quad \frac{y}{4} = \frac{x}{2};\quad y = 2x;\quad dy = 2dx.$$

$$\int_2^0 x\cdot 2dx - 2xdx = 0.$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}(\text{од.кв.})$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Розв'язання. Перш за все визначимо підінтегральний вираз $dx = a(1 - \cos t)dt;\ \ dy = a \sin t\, dt.$

При обчисленні даного інтегралу інтегрування повинно виконуватись по контуру *OABO* (рис. 22) в напрямку, вказаному стрілками. На дузі *ABO* параметр t змінюється від 2π до 0. На відрізку *OA* $y = 0$, тому $dy = 0$.

$$S = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}\left[a(t - \sin t)\cdot a \sin t - a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)\right] dt =$$

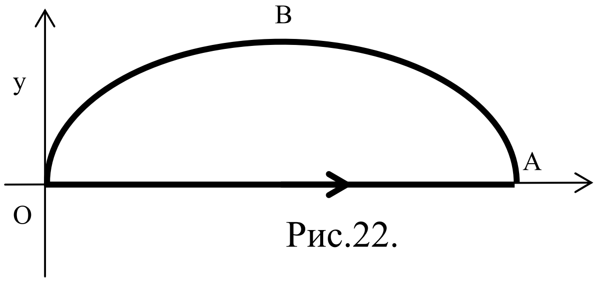


Рис.22.

$$= \frac{1}{2}a^2\int_{2\pi}^{0}(t\cdot \sin t + 2\cos t - 2)\,dt = a^2\left[\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} t\cdot \sin t\, dt + \int_{2\pi}^{0}\cos t\, dt - \int_{2\pi}^{0} dt\right].$$

Обчислимо перший інтеграл окремо, використовуючи метод інтегрування частинами.

$$\int_{2\pi}^{0} t\cdot \sin t\, dt = \left|\begin{matrix} U = t;\ dU = dt \\ dV = \sin t dt; V = -\cos t \end{matrix}\right| =$$

$$= -t\cdot \cos t\,\Big|_{2\pi}^{0} + \int_{2\pi}^{0}\cos t\, dt = -2\pi + \sin t\,\Big|_{2\pi}^{0} = -2\pi.$$

Отже, маємо

$$S = a^2\left[-\pi + \sin t\,\Big|_{2\pi}^{0} - t\,\Big|_{2\pi}^{0}\right] = a^2[-\pi + 2\pi] = \pi a^2(\text{од.кв.})$$

Приклад 3. Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки массою *m* з точки *B*(1,1) в точку *C*(4,2) по прямій.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки *B* і *C*

$$\frac{y - 1}{1} = \frac{x - 1}{3};\quad y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1);\quad y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Запишемо криволінійний інтеграл. Тут проекції сили: $P(x,y) = xy;$ $Q(x,y) = x + y$. При переміщенні від точки *B*(1,1) до точки *C*(4,2) змінна x пробігає значення від 1 до 4.

$$A = \int_L xydx + (x + y)dy = \int_1^4 x\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)dx + \left(x + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}dx =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{9}x + \frac{2}{9}\right)dx = \left(\frac{1}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^2 + \frac{2}{9}x\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{9}(64-1) + \frac{5}{9}(16-1) + \frac{2}{9}(4-1) = \frac{63+75+6}{9} = 16 \text{ (од.роботи)}$$

1.3. Криволінійний інтеграл по довжині дуги

Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в точках дуги AB гладкої кривої L, рівняння якої $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Розіб'ємо дугу точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Нехай ΔS_k - довжина дуги $A_{к-1}A_к$. На кожній елементарній дузі виберемо довільну точку $M_к(\xi_k;\eta_k)$ і помножимо значення функції $f(\xi_k;\eta_k)$ в цій точці на довжину відповідної дуги ΔS_k.

Інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ по довжині дуги AB називається сума виду:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k .$$

Криволінійним інтегралом по довжині дуги AB від функції $f(x,y)$, або криволінійним інтегралом 1-го роду називається границя інтегральної суми за умови, що $\max \Delta S_k \to 0$, тобто

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k ,$$

де ds – диференціал дуги.

Криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx . \tag{1}$$

Якщо крива L задана параметричними рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt . \tag{2}$$

Аналогічно визначається і обчислюється криволінійний інтеграл 1-го роду від функції трьох змінних $f(x,y,z)$ по просторовій кривій. Якщо просторова крива задана рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z`(t)\big)^2}\,dt\,. \qquad (3)$$

Якщо *f(x,y)* > 0, то криволінійний інтеграл 1-го роду, тобто $\int\limits_L f(x,y)ds$ являє собою масу кривої *L*, що має змінну лінійну густину $\gamma = f(x,y)$ (фізичне тлумачення).

Основні властивості криволінійного інтеграла по довжині дуги (1-го роду)

1. Криволінійний інтеграла 1-го роду не залежить від напрямку шляху інтегрування

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds\,.$$

2. Криволінійний інтеграла 1-го роду від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі криволінійних інтегралів

$$\int\limits_L \big(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\big)ds = \int\limits_L f_1(x,y)ds \pm \int\limits_L f_2(x,y)ds\,.$$

3. Константу можна виносити за знак криволінійного інтегралу $\int\limits_L cf(x,y)ds = c\int\limits_L f(x,y)ds$, де $c = const.$

4. Якщо контур інтегрування *L* розбити на дві частини L_1 і L_2, то інтеграл можна представити у вигляді суми

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{L_1} f(x,y)ds + \int\limits_{L_2} f(x,y)ds\,.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_L (x-y)ds$, де *L* – відрізок прямої від точки *O*(0;0) до точки *A*(4;3).

Розв'язання. Складемо рівняння прямої *OA.* Так як ця пряма проходить через початок координат, то її рівняння можна записати у вигляді *y = кx*. Оскільки точка *A*(4;3) належить прямій *OA*, то координати точки *A* задовольняють рівнянню *y = кx*. Тому, підставляючи в це рівняння координати точки *A*, одержимо 3 = 4*к*, звідки $к = \frac{3}{4}$. Отже, рівняння прямої *OA:* $y = \frac{3}{4}x$.

Враховуючи далі, що $y' = \frac{3}{4}$ і $0 \le x \le 4$, за формулою (1) знаходимо

$$\int\limits_L (x-y)ds = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{5}{2}\,.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L (x+y)ds$, де L – контур трикутника OAB з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$ (рис. 23).

Розв'язання. Контур інтегрування складається з відрізків трьох прямих. З'ясуємо їх рівняння та відповідні похідні:
на прямій *OA*: $y = 0$, $y' = 0$, $0 \le x \le 1$;
на прямій *AB*: $y = 1 - x$, $y' = -1$, $0 \le x \le 1$;
на прямій *OB*: $x = 0$, $x' = 0$, $0 \le y \le 1$.

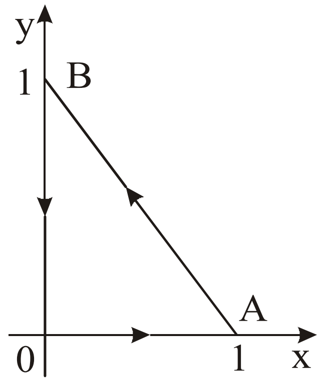


Рис. 23.

Тому згідно з властивостями (4) і (1) криволінійного інтеграла по довжині дуги і формулою (1), будемо мати:

$$\int\limits_L (x+y)ds = \int\limits_{OA} (x+y)ds + \int\limits_{AB} (x+y)ds + \int\limits_{BO} (x+y)ds =$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+0}dx + \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+1}dx + \int_0^1 y\sqrt{1+0}dy = \int_0^1 xdx + \sqrt{2}\int_0^1 dx + \int_0^1 ydy =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \sqrt{2}x\Big|_0^1 + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де L – дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$ і $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Маємо

$$x_t' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t;$$

$$y_t' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Виконаємо необхідні перетворення

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2t^2.$$

Скориставшись формулою (2), одержимо:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2}\cdot\sqrt{a^2t^2dt}=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sqrt{\cos^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\cdot tdt=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{3}\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Приклад 4. Обчислити $\int_L (x+z)ds$ де L – дуга кривої $x = t$, $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$ і $0\le t\le 1$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо $x'_t = 1$, $y'_t=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 2t=3\sqrt{2}t$, $z'_t=3t^2$. Тоді $\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2+\left(z'_t\right)^2=1+18t^2+9t^4$. Далі, за формулою (3) маємо:

$$\int_L (x+z)ds=\int_0^1\left(t+t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt=\frac{1}{36}\int_0^1\left(1+18t^2+9t^4\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+18t^2+9t^4\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\cdot\frac{2\left(1+18t^2+9t^4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{54}\left(28^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{1}{54}\left(56\sqrt{7}-1\right).$$

Приклад 5. Обчислити $\int_L (x-y)ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = ax$ в полярних координатах має вигляд $r = a\cos\varphi$. Оскільки $r'_\varphi=-a\sin\varphi$ і $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, то

$$\int_L (x-y)ds=\int_\alpha^\beta\left(r\cos\varphi-r\sin\varphi\right)\sqrt{r^2+\left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\left(\cos\varphi-\sin\varphi\right)\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\left(\cos\varphi-\sin\varphi\right)\cdot a\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}-\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=a^2\left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi-\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int_L yds$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;\sqrt{8})$.

Розв'язання. Тут зручно лінію задати у вигляді $x=\frac{y^2}{2}$. Тоді $x'_y=y$ і :

$$\int_L yds = \int_c^d y\sqrt{1+\left(\dot{x_t}\right)^2}dy = \int_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int_c^d \left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.$$

1.3.1. Застосування криволінійного інтеграла по довжині дуги до розв'язання задач механіки

Нехай L є плоска крива, яка має змінну лінійну густину $\gamma(x,y)$, тоді:

а) маса m кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x,y)ds\,; \tag{4}$$

б) статичні моменти дуги кривої відносно осей координат, знаходять за формулами

$$M_x = \int_L \gamma(x,y)yds\,, \tag{5}$$

$$M_y = \int_L \gamma(x,y)xds\,; \tag{6}$$

в) координати центра ваги дуги кривої обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}\,, \tag{7}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}\,; \tag{8}$$

г) моменти інерції дуги кривої відносно координатних осей і початку координат знаходяться за формулами:

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x,y)ds\,, \tag{9}$$

$$I_y = \int_L x^2\gamma(x,y)ds\,, \tag{10}$$

$$I_0 = \int_L \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)ds\,. \tag{11}$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти масу дуги кривої $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$ $(0 \le t \le 1)$, лінійна густина якої змінюється за законом $\gamma = \sqrt{2y}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x'_t = 1$, $y'_t = t$, $z'_t = t^2$ і $0 \le t \le 1$ за формулою (3) маємо:

$$m = \int_L \sqrt{2y}ds = \int_0^1 \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}t^2} \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt = \int_0^1 t\sqrt{1^2 + t^2 + t^4}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}}d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \sqrt{t^4 + t^2 + 1} + \frac{3}{8}\ln\left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2 + 1}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Приклад 2. Знайти координати центра ваги однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$.

Розв'язання. За формулами (7), (8) маємо:

$$x_c = \frac{M_y}{m};$$
$$y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо спочатку m, M_x і M_y, враховуючи, що $\gamma(x,y) = 1$, $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$:

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Маємо:

$$m = \int_L ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int_0^\pi \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^\pi = 4a.$$

$$M_x = \int_L yds \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int_0^\pi a(1 - \cos t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a^2\int_0^\pi (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^2\int_0^\pi 2\sin^2\frac{t}{2} \cdot \sin\frac{t}{2}dt = 4a^2\int_0^\pi\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt = 4a^2\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt - 4a^2\int_0^\pi \cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^2\left(-8\cos\frac{t}{2} + 8\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = a^2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}a^2.$$

$$M_y = \int_L xds \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt = \int_0^{\pi} a(t-\sin t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a^2\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2} - 2a^2\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt = \left|\begin{matrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin\frac{t}{2}dt & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right| = 2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 2\int\cos\frac{t}{2}dt\right)\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-4a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = 4a^2\left(-t\cos\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} - 8a^2\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{\pi} = 8a^2 - \frac{8}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2.$$

Таким чином, $x_c = \frac{4}{3}a$ і $y_c = \frac{4}{3}a$.

Приклад 3. Знайти моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $z = -2y + 1$, розташованого між осями координат в площині yOz.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої з осями координат. При $y = 0$ $z = 1$, при $z = 0$ $y = \frac{1}{2}$. Отже, $A(0;1)$ і $B(\frac{1}{2};0)$ – шукані точки.

За формулами (9) і (10):

$$I_y = \int_{AB} z^2\gamma(y,z)ds;$$

$$I_z = \int_{AB} y^2\gamma(y,z)ds.$$

Оскільки $z = -2y + 1$, то $z_y' = -2$ і $ds = \sqrt{1+\left(z_y'\right)^2}dy = \sqrt{1+4}dy = \sqrt{5}dy$. Враховуючи також, що $\gamma(x,y) = 1$, бо пряма однорідна, одержимо:

$$I_y = \int_0^{\frac{1}{2}}(-2y+1)^2\sqrt{5}dy = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{(-2y+1)^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{6}(0-1) = \frac{\sqrt{5}}{6};$$

$$I_z = \int_0^{\frac{1}{2}} y^2\sqrt{5}dy = \sqrt{5}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{1}{8}-0\right) = \frac{\sqrt{5}}{24}.$$

Отже, $I_y = \frac{\sqrt{5}}{6}$ і $I_z = \frac{\sqrt{5}}{24}$.

Приклад 4. Знайти момент інерції відносно початку координат дуги кривої $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$ між точками, для яких $t = 0$ і $t = 1$, якщо густина γ в кожній її точці дорівнює $\frac{1}{y^2}$.

Розв'язання. За формулою (11) $I_0 = \int_L \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)ds$.

Оскільки $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$, то $x_t' = t^2$, $y_t' = t$ і

$$ds = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt = \sqrt{t^4+t^2}dt = t\sqrt{t^2+1}dt, \ \gamma = \frac{1}{y^2} = \frac{4}{t^4}.$$

Тоді

$$I_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right)\cdot\frac{4}{t^4}\cdot t\sqrt{t^2+1}dt \int_0^1 \left(\frac{4}{9}t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}\cdot tdt = \left|\begin{array}{c} t^2+1=u^2 \\ 2tdt = 2udu \\ tdt = udu \\ u_н = 1; \quad u_b = \sqrt{2} \end{array}\right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9}\left(u^2-1\right)+1\right)\cdot u\cdot udu = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9}u^4 + \frac{5}{9}u^2\right)du = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}u^5+\frac{5}{3}u^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{5}-\frac{5}{3}\right) = \frac{98\sqrt{2}-37}{135}.$$

РОЗДІЛ 2. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Числові ряди

Рядом називають суму нескінченної множини елементів

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots, \qquad (1)$$

які є членами нескінченної послідовності $\{U_n\}$.

Елементи $U_1, U_2, U_3, \dots U_n, \dots$ називають ***членами ряду***.

Скорочено ряд позначають так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots.$$

Сума *n* перших членів ряду

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n. \qquad (2)$$

називається ***частковою сумою ряду***. Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається ***розбіжним***.

Необхідна ознака збіжності ряду: якщо ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ збігається, то його загальний член U_n наближається до нуля, при нескінченному зростанні *n*, тобто

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \qquad (3)$$

Ця ознака не є достатньою.

Приклад 1. Знайти суму ряду та дослідити його на збіжність.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Розв'язання:

1) Розкладемо даний раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Потім послідовно розглянемо часткові суми даного ряду.

Розкладемо квадратний тричлен на лінійні множники:

$$4n^2+8n+3=4n^2+8n+4-4+3=(2n+2)^2-1=(2n+1)(2n+3).$$

Тепер загальний член ряду представимо у вигляді:

$$U_n=\frac{2}{4n^2+8n+3}=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Розкладемо отриманий раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{A}{2n+1}+\frac{B}{2n+3};$$

$$2=A(2n+3)+B(2n+1);$$

$$\text{при } n=-\frac{1}{2},\ \text{маємо: } 2=2A,\qquad A=1;$$

$$\text{при } n=-\frac{3}{2},\ \text{маємо: } 2=-2B,\qquad B=-1.$$

Тому маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right).$$

Розглянемо часткові суми даного ряду.

$$S_1=\frac{1}{2\cdot1+1}-\frac{1}{2\cdot1+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5};$$

$$S_2=\frac{1}{2\cdot1+1}-\frac{1}{2\cdot1+3}+\frac{1}{2\cdot2+1}-\frac{1}{2\cdot2+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7};$$

$$S_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2\cdot3+1}-\frac{1}{2\cdot3+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9};$$

$$\dots$$

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}.$$

Для знаходження суми S даного ряду, перейдемо до границі:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2) Формула суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії:

$$S=\frac{b_1}{1-q},$$

де b_1 - перший член нескінченно спадаючої геометричної прогресії, а q - її знаменник.

Представимо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{3\cdot2^4}+\dots=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots\right).$$

Знаменник $q={}^1/_2$, а перший член b_1=1. Сума дорівнює:

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-{}^1/_2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2.1.1. Ряди з додатними членами

Для числових рядів з додатними членами ($U_n > 0$), при дослідженні на збіжність, використовують наступні достатні ознаки збіжності:

Ознака порівняння. Якщо ряд з додатними членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots \qquad (4)$$

порівняти з іншим рядом з додатними членами

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots \qquad (5)$$

збіжність або розбіжність котрого відома, і якщо починаючи з деякого номера *n* виконується умова:

1) $U_n \le V_n$ і ряд (5) збігається, то і ряд (4) також збігається;
2) $U_n \ge V_n$ і ряд (5) розбігається, то і ряд (4) також розбігається.

При використанні цієї ознаки, в якості еталонного ряду часто використовують нескінченну геометричну прогресію

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q > 0,$$

яка при $q < 1$ збігається, а при $q \ge 1$ розбігається, або узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \; .$$

який при $p > 1$ збігається і розбігається при $p \le 1$.

Ознака Д'Аламбера. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, а при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Радикальна ознака Коші. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Інтегральна ознака Коші. Ряд з додатними членами $U_n = f(n)$ збігається або розбігається, якщо збігається або розбігається відповідний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx, \text{ де } f(x) - \text{ неперервно спадаюча функція.}$$

Приклад 2. Дослідити за ознакою порівняння збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n}.$$

Розв'язання:

1) Порівняємо цей ряд з узагальненим гармонійним рядом. В якості еталонного ряду обираємо $V_n = \frac{1}{n^2}$, так як $p = 2$, то цей ряд є збіжним. Виконаємо порівняння U_n з V_n:

$$\frac{1}{n^2 + 7n + 4} \le \frac{1}{n^2}.$$

Отже, згідно ознаки порівняння, даний ряд є збіжним.

2) Кожен член U_n даного ряду більше від відповідного члена $V_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

Згідно ознаки порівняння, даний ряд розбігається.

3) Кожен член $U_n = \frac{1}{(n+2)5^n}$ даного ряду, починаючи з другого, менше відповідного члена $V_n = \frac{1}{5^n}$ нескінченної геометричної прогресії, $q = \frac{1}{5} < 1$. Ця нескінченна геометрична прогресія є збіжним рядом. Згідно ознаки порівняння $\frac{1}{(n+2)5^n} < \frac{1}{5^n}$, досліджуваний ряд також збігається.

Приклад 3. Дослідити за ознакою Д'Аламбера збіжність ряду:

$$1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n};\quad 3)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

Розв'язання:

1) Знаючи n-ий член ряду, знаходимо наступний (n+1)-й член:

$$U_n = \frac{3^n}{2^n(2n+1)},\quad U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)+1)} = \frac{3^n \cdot 3}{2^n \cdot 2 \cdot (2n+3)}.$$

Знайдемо границю відношення U_{n+1} до U_n при необмеженому зростанні n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot (2n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot (2n+3) \cdot 3^n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Так як $n \to \infty$ і максимальна степінь чисельника дорівнює максимальній степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів, які знаходяться біля старшої степені n, отже маємо: $C = \frac{3}{2} > 1$ тому даний ряд розбігається.

$$2)\ U_n = \frac{n!}{5^n};\qquad U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)}{5^n \cdot 5}.$$

Знайдемо границю відношення U_{n+1} до U_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)\cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5} = \infty,$$

$C = \infty$, тому робимо висновок що даний ряд розбігається.

$$3)\ U_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!};\qquad U_{n+1} = \frac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!} = \frac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-3)!} =$$

$$= \frac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{3n}\cdot 7^3\cdot(2n-5)!}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)\cdot 7^{3n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^3}{(2n-4)\cdot(2n-3)} = 0.$$

$C = 0 < 1$, тому робимо висновок, що даний ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити за радикальною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2}$$

Розв'язання:

1) За радикальною ознакою Коші необхідно знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+5} = \frac{3}{4}.$$

$C = \frac{3}{4} < 1 -$ ряд збігається.

$$2) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n}{2n-1} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n-(2n-1)}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$C = \sqrt{e} > 1 -$ ряд розбігається.

(При обчисленні границі ми скористалися другою чудовою границею).

Приклад 5. Дослідити за інтегральною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Розв'язання. Замінимо у заданому виразі загального члену ряду $U_n = f(n)$ номер n неперервною змінною x і переконаємося, що функція $f(x)$ є неперервною і спадаючою на нескінченному інтервалі зміни x. Потім знаходимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ з нескінченною верхньою границею.

$$1) \; f(x) = \frac{2x}{x^2+1}; \qquad \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ t_н = 2;\; t_в = \infty \end{bmatrix} == \lim_{N\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{N\to\infty} \ln t \Big|_2^N = \ln\infty - \ln 2 = \infty.$$

Інтеграл розбігається, а отже розбігається і ряд.

$$2) \; f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}; \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{N\to\infty} \int_2^N \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_н = \ln 2;\; t_в = \infty \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\ln 2}^{N} \frac{dt}{t^2} = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\ln 2}^{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{t}\Big|_N^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збігається, тому збігається і ряд.

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2n-1}};\quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} 2\sqrt{2x-1}\Big|_1^N == \infty-1=\infty.$

Інтеграл розбігається, а отже ряд розбігається.

2.1.2. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду. Ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінний ряд (з членами різних знаків)

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1+U_2+U_3+\cdots$$

називається ***абсолютно*** збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = |U_1|+|U_2|+|U_3|+\cdots$$

Ряд, знаки членів котрого строго чергуються

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\cdots+(-1)^{n+1}U_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n,\ (U_n>0)$$

збігається, якщо його члени зменшуються за абсолютним значенням, тобто $U_1>U_2>U_3>\cdots$ і загальний член ряду на нескінченност прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} U_n=0.$ (ознака Лейбніца).

Приклад 6. Дослідити збіжність знакозмінного ряду.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};\quad 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Розв'язання:

1) $U_n=\frac{1}{2n-1}$. Досліджуємо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$$

отже даний ряд збігається. Для того щоб установити збігається ряд абсолютно чи умовно, дослідимо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^\infty\frac{dx}{2x-1}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} ln(2x-1)\Big|_1^N=\frac{1}{2}(\lim_{N\to\infty} ln(2N-1)-1)=\infty,$$

невласний інтеграл розбігається, тому можемо зробити висновок, що ряд збігається умовно.

2) $U_n=\frac{1}{(2n-1)!}$. За ознакою Лейцбніца ряд збігається. Досліджуємо за ознакою Д'Аламбера.

Знайдемо $U_{n+1}=\frac{1}{(2(n+1)-1)!}=\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{(2n-1)!2n(2n+1)};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!\,2n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0, \qquad (C<1).$$

Даний ряд збігається абсолютно.

3) $U_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$. **Дослідимо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$, ряд збігається. Застосуємо інтегральну ознаку Коші для з'ясування абсолютної збіжності:

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{x^2+x}=$$

$$=\left[x^2+x=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^N=$$

$$=\ln\left(\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}\right)-\ln\frac{1}{2}=\ln 1+\ln 2=\ln 2.$$

Інтеграл збігається, а отже ряд збігається абсолютно.

2.2. Функціональні ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\cdots$, **члени якого** являються функціями від змінної x, називається ***функціональним***. При різних значеннях x функціональний ряд перетворюється в числовий, який може бути збіжним або розбіжним.

Сукупність значень x, при яких функціональний ряд збігається, називається ***областю збіжності***.

З усіх функціональних рядів найпростішими і найпоширенішими є степеневі ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

або більш загального виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

Для визначення області збіжності функціонального ряду, як правило, спочатку використовують ознаку Д'Аламбера, а потім ті значення x, для яких ця ознака не відповідає на питання збіжності ряду ($C=1$), досліджуються окремо.

Приклад 7. Визначити інтервали збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^nx^{2n}n!}{(2n)!};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{3n}}{n^2}.$$

Розв'язання:

1) За відомим загальним членом ряду U_n, знайдемо U_{n+1}:

$$U_n = \frac{x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}; \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}}.$$

Далі, за ознакою Д'Аламбера, знаходимо границю

$$C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}2^{n-1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}\;x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| == \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x|}{2}.$$

З'ясуємо, при яких значеннях x ця границя буде менше одиниці, тобто

$$\frac{|x|}{2} < 1;$$
$$-1 < \frac{x}{2} < 1;$$
$$-2 < x < 2.$$

Згідно ознаки Д'Аламбера, при будь-якому значенні x із знайденого інтервалу даний ряд збігається абсолютно, а при $|x| > 2$ розбігається. Граничні точки $x = \pm 2$ досліджуємо окремо.

При $x = -2$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

який розбігається, що випливає із ознаки порівняння його з узагальненим гармонійним рядом.

При $x = 2$ отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{\sqrt{n+1}},$$

котрий збігається за ознакою Лейбніца: $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0$ і не збігається абсолютно за ознакою порівняння (див. вище), а отже збігається умовно.

Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду є напіввідкритий інтервал: $-2 < x \le 2$.

2) $U_n = \dfrac{3^n x^{2n} n!}{(2n)!}$, $\quad U_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}x^{2n+2}(n+1)!}{(2n+2)!} = \dfrac{3^{n+1}x^{2n}x^2 n!\,(n+1)}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}$.

Знаходимо границю:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n}x^2 n!\,(n+1)(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)3^n x^{2n} n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x^2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right| =$$
$$= 3x^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2+6n+2} = 3x^2\cdot 0 = 0 < 1,$$

тобто для даного ряду $C < 1$ при будь-якому значенні x.

Інтервал збіжності ряду: $-\infty < x < \infty$.

3) $U_n = \dfrac{(x+5)^{3n}}{n^2}; \quad U_{n+1} = \dfrac{(x+5)^{3n+3}}{(n+1)^2};$

$$C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{3n+3}n^2}{(n+1)^2(x+5)^{3n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^3n^2}{(n+1)^2}\right| == |x+5|^3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x+5|^3.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$|x+5|^3 < 1;$$
$$|x+5| < 1;$$
$$-1 < x+5 < 1;$$

$$-6 < x < -4.$$

Граничні точки інтервалу досліджуємо окремо.

При $x = -6$ отримуємо знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно за ознакою Лейбніца.

При $x = -4$ отримуємо числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Згідно з ознакою порівняння ряд збігається.

Інтервал збіжності ряду: $-6 \le x \le -4$.

2.3. Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки a називається степеневий ряд відносно двочлена $x - a$ виду

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (\text{Т})$$

При $a = 0$ ряд Тейлора є степеневий ряд відносно незалежної змінної x, який називається рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \qquad (\text{М})$$

Розкладання деяких елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots (-\infty, \infty) \ ; \qquad (6)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty, \infty) \ ; \qquad (7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty, \infty) \ ; \qquad (8)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1,1) \ ; \qquad (9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1,1] \ ; \qquad (10a)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad [-1,1) \ ; \qquad (10b)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1,1) \ ; \qquad (11)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad [-1,1] \ ; \qquad (12)$$

Для того, щоб розкласти дану функцію в ряд Тейлора необхідно:

1) написати ряд Тейлора для даної функції, тобто обчислити значення цієї функції та її похідних при $x = a$ і підставити отримані значення в загальний вираз ряду Тейлора (Т);

2) дослідимо отриманий ряд на збіжність та знайти інтервал збіжності.

Приклад 8. Розкласти функції в ряд Тейлора:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{2x-1},\ \text{при}\ a=2;\quad 2) f(x)=\ln(3x-1),\ \text{при}\ a=1.$$

Розв'язання:

1) Знайдемо похідні та обчислимо їх значення при $x=a$:

$$f(x)=\frac{1}{2x-1},\quad f(2)=\frac{1}{3};$$

$$f'(x)=\frac{(-1)}{(2x-1)^2}\cdot 2,\quad f'(2)=\frac{(-1)\cdot 2}{3^2};$$

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^4}\cdot 2(2x-1)\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{(2x-1)^3},\qquad f''(2)=\frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{3^3}=\frac{2!\cdot 2^2}{3^3};$$

$$f^{(3)}(x)=1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^6}\cdot 3(2x-1)^2\cdot 2=\frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{(2x-1)^4},$$

$$f^{(3)}(2)=\frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{3^4}=\frac{(-1)\cdot 3!\cdot 2^3}{3^4};$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}},\qquad f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

Підставляючи отримані значення в ряд Тейлора (Т), отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{1!\cdot 2}{1!\cdot 3^2}(x-2)+\frac{2!\cdot 2^2}{2!\cdot 3^3}(x-2)^2-\frac{3!\cdot 2^3}{3!\cdot 3^4}(x-2)^3+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{n!\cdot 3^{n+1}}(x-2)^n+\cdots=$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}(x-2)+\frac{2^2}{3^2}(x-2)^2-\frac{2^3}{3^3}(x-2)^3+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^n}(x-2)^n+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot(x-2)^n}{3^n}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{2^n\cdot(x-2)^n}{3^n};\quad U_{n+1}=\frac{2^{n+1}\cdot(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2\cdot 2^n\cdot(x-2)^n\cdot(x-2)}{3\cdot 3^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot 2^n\cdot(x-2)^n\cdot(x-2)\cdot 3^n}{3\cdot 3^n\cdot 2^n\cdot(x-2)^n}\right|=\frac{2}{3}|x-2|.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{2}{3}|x-2|<1;$$
$$-1<\frac{2}{3}(x-2)<1;$$
$$-\frac{3}{2}<x-2<\frac{3}{2};$$
$$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}.$$

Граничні точки цього інтервалу дослідимо окремо.

При $x=\frac{1}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot(-1)^n\cdot 3^n}{3^n 2^n}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}1$ – ряд розбігається.

При $x=\frac{7}{2}$ отримаємо ряд$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ - ряд розбігається.

Інтервал збіжності ряду: $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$.

$$2)\ f(x)=\ln(4x-1),\quad f(1)=\ln 3;$$

$$f'(x)=\frac{1}{4x-1}\cdot 4,\quad f'(1)=\frac{1\cdot 4}{3};$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(4x-1)^2}\cdot 4^2,\quad f''(1)=\frac{-1\cdot 4^2}{3^2};$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot(4x-1)}{(4x-1)^4}\cdot 4^3=\frac{2!\cdot 4^3}{(4x-1)^3},\quad f^{(3)}(1)=\frac{2!\cdot 4^3}{3^3};$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{(4x-1)^n},\quad f^{n}(1)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{3^n};$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots\cdots$$

Підставимо отримані значення в ряд Тейлора (Т)

$$f(x)=\ln 3+\frac{4}{3}(x-1)-\frac{1!\cdot 4^2}{2!\cdot 3^2}(x-1)^2+\frac{2!\cdot 4^3}{3!\cdot 3^3}(x-1)^3+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{n!\cdot 3^n}(x-1)^n+\cdots==\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{n!\cdot 3^n}(x-1)^n=$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4^n}{n\cdot 3^n}(x-1)^n.$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{4^n\cdot(x-1)^n}{n\cdot 3^n};\quad U_{n+1}=\frac{4^{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot(x-1)^n}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{4}{3}|x-1|$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{4}{3}|x-1|<1;$$

$$-1<\frac{4}{3}(x-1)<1;$$

$$\frac{1}{4}<x<\frac{7}{4}.$$

При $x=\frac{1}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\text{ряд збігається умовно}$$

за ознакою Лейбніца (див. вище).

При $x-\frac{7}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n\cdot 3^n}-\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}-\text{ ряд розбігається (див. вище).}$$

Область збіжності ряду: $x\epsilon\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$.

Приклад 9. Розкласти функції в ряд Маклорена, з'ясувати області збіжності отриманих рядів:

$$1)\ f(x)=e^{3x};\quad 2)\ f(x)=x\cdot sin2x;\quad 3) f(x)=\frac{1}{x^2+2}.$$

Розв'язання:

1) Розкладання функції e^{3x} в ряд Маклорена легко отримати, замінивши у формулі (1) x на $3x$:

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(3x)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{3^n x^n}{n!},\quad U_{n+1}=\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{3x\ 3^n x^n}{n!\,(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x\cdot 3^n\cdot x^n\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 3^n\cdot x^n}\right|=|3x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|3x|\cdot 0=0,$$

даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

2) розкладемо $sin2x$ за формулою (2):

$$sin2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$x\cdot sin2x=x\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!},\quad U_{n+1}=\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+3)!}=\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 2^{2n+1}x^{2n+2}}\right|=$$

$$=4x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0,$$

отже, даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

3) розкладемо в ряд Маклорена тільки дріб $\frac{1}{x^2+2}$, замінивши x^2 на t:

$$f(t)=\frac{1}{t+2},\quad f(0)=\frac{1}{2};$$

$$f'(t)=\frac{-1}{(t+2)^2},\quad f'(0)=-1\cdot\frac{1}{2^2};$$

$$f''(t)=\frac{1\cdot 2\cdot(t+2)}{(t+2)^4}=\frac{1\cdot 2}{(t+2)^3},\qquad f''(0)=\frac{1\cdot 2}{2^3};$$

$$f'''(t)=\frac{-1\cdot 2\cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(t+2)^4},\qquad f'''(0)=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{2^4};$$

$$\ldots\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\quad\ldots$$

$$f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(t+2)^{n+1}},\qquad f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}.$$

Отриманні значення підставимо у формулу (М):

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{1\cdot 2}{2^3}\cdot\frac{x^2}{2!}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}\cdot\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}\cdot\frac{x^n}{n!}+\dots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{2^{n+1}}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad U_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{2^{n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{2^{n+2}\cdot x^n}\right|=\frac{1}{2}\cdot|x|<1;$$

$$-2<x<2.$$

При $x=-2,$ отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-2)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}\cdot 2^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}-\text{ряд розбігається.}$$

При $x=2,$ отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}-\text{ ряд розбігається.}$$

2.4. Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, роз'язання диференційних рівнянь.

Приклад 10. Обчислити наближено зазначену величину з точністю до α, використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції.

$1)\sqrt[3]{500},\alpha=0{,}001;\ \ 2)\cos 10^{\circ},\alpha=0{,}001;\ \ 3)\ln 7,\alpha=0{,}0001.$

Розв'язання. 1) Наближене обчислення зазначеної функції виконується за допомогою біноміального ряду.

Представимо дане число у вигляді, до якого можливо застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{1000\cdot\frac{1}{2}}=10\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=10\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}}=10\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В біноміальний ряд підставимо замість x величину $\left(-\,^1\!/_2\right), m={}^1\!/_3.$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5+$$

$$+\dots=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{36}-\frac{5}{648}-\frac{5}{1944}-\frac{11}{11644}-\dots=1-0{,}1666666-0{,}0277777-$$
$$-0{,}007716-0{,}002572-0{,}0009446-\dots\approx 0{,}79396.$$
$$\sqrt[3]{500}\approx 10\cdot 0{,}79396\approx 7{,}9396.$$

3) Представимо аргумент функції косинус через радіанну міру кута:
$x=10^{\circ}=\frac{10\cdot\pi}{180}=\frac{3{,}14159}{18}=0{,}17453.$

Для обчислення наближеного значення функції скористаємося формулою:

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots\ ;$$

$$cos0{,}17453=1-\frac{(0{,}17453)^2}{2!}+\frac{(0{,}17453)^4}{4!}-\frac{(0{,}17453)^6}{6!}+\dots=$$
$$=1-0{,}01523+0{,}0000386-\dots\approx 0{,}9848.$$

$$3)\ \ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots\qquad(-1{,}1];$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots-\frac{x^n}{n}-\dots\qquad[-1{,}1)$$

Аргумент функції не задовольняє умові $x\epsilon(-1{,}1)$, тому скористаємося наступною формулою:

$$\ln(1+x)-\ \ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right);\ \ x\neq 1.$$
$$\frac{1+x}{1-x}=7;\ \ 7(1-x)=1+x;\ \ 8x=6;\ \ x=\frac{3}{4}=0{,}75.$$
$$\ln 7=\ln\frac{1+0{,}75}{1-0{,}75}=2\left(0{,}75+\frac{0{,}75^3}{3}+\frac{0{,}75^5}{5}+\frac{0{,}75^7}{7}+\dots\right)=$$
$$=2(0{,}75+0{,}140625+0{,}04746+0{,}019069+\dots)=1{,}914308.$$

Приклад 11. Обчислити визначений інтеграл з точністю $\alpha=0{,}0001$.

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx$$

Розв'язання. Даний інтеграл не можливо обчислити в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію необхідно розкласти в степеневий ряд і перевірити, чи належать границі інтегрування області збіжності цього ряду, якщо так, то наближене обчислення інтегралу можливе.

Розкладемо функцію $y=sin(x^2)$ в степеневий ряд за формулою:

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots\ ,$$

замінивши в ній x на x^2. Отримаємо

$$sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\dots\ .$$

Знайдемо область збіжності отриманого степеневого ряду, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$U_n=\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!};\ U_{n+1}=\frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{4n+6}(2n+1)!}{(2n+3)!\,x^{4n+2}}\right| = x^4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^4\cdot 0 = 0.$$

Область збіжності $(-\infty,\infty)$. Відрізок $[0,1]$ належить області збіжності. Таким чином,

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx = \int_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\cdots\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{42}+\frac{1}{1320}-\cdots.$$

Отримали знакозмінний числовий ряд. Остаток ряду не перевищує першого із відкиданих членів. У даному випадку достатньо взяти перші два члена, а

$$R_3<\frac{1}{1320}<8\cdot 10^{-4}.$$

Тобто, вказана точність буде дотримуватись. Тому

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{42}\approx 0{,}3095.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок диференційного рівняння $y''+x^2y=0$ у вигляді степеневого ряду і частинне розв'язання, яке задовольняє початковим умовам: $y(0)=1, y'(0)=2.$

Розв'язання. Нехай степеневий ряд має вид

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Знайдемо y'': $y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1};\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$

Підставимо знайдені значення в дане рівняння:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

Отриманий вираз дорівнює нулю, якщо суми коефіцієнтів при відповідних степенях дорівнюють нулю. Останній вираз перепишемо у вигляді:

$$2a_2+2\cdot 3\cdot a_3\cdot x+(a_1+3\cdot 4\cdot a_4)x^2+(a_2+4\cdot 5\cdot a_5)x^3+$$
$$+(a_3+5\cdot 6\cdot a_6)x^4+\cdots+(a_n+(n+3)(n+4)a_{n+4})x^{n+2}+\cdots=0$$

Звідки випливає, що $a_2=0;\ a_3=0;\ a_0+3\cdot 4\cdot a_4=0;\ a_1+4\cdot 5\cdot a_5=0;$ $a_2+4\cdot 5\cdot a_5=0;\ \ldots;\ a_n+(n+3)(n+4)a_{n+4}=0.$

Остання рівність дає рекурентне відношення:

$$a_{n+4}=-\frac{a_n}{(n+3)(n+4)}$$

яке дозволяє визначити всі коефіцієнти шуканого степеневого ряду. Рекурентне відношення має цикл $4k$. Таким чином, $a_{4k+2}=0; a_{4k+3}=0;$

$a_{4k}=-\frac{a_{4(k-1)}}{(4k-1)4k};\ \ a_{4k+1}=-\frac{a_{4k-3}}{4k(4k+1)}$ для всіх $k\geq 1$. Наприклад,

$a_4=-\frac{a_0}{3\cdot 4}, a_5=-\frac{a_1}{4\cdot 5}, a_6=0, a_7=0, a_8=-\frac{a_4}{7\cdot 8}, a_9=-\frac{a_5}{8\cdot 9}.$

В a_8 і a_9 підставимо a_4 і a_5 виражені через a_0 і a_1 відповідно. Отримаємо,

$$a_8 = \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8};\ a_9 = \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}.$$

Отже, шуканий ряд буде мати вид:

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{3\cdot 4}x^4 - \frac{a_1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8 + \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots.$$

Отриманий ряд можна групувати у вигляді суми двох рядів:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right) +$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right).$$

Початкове диференційне рівняння другого порядку, тому знайдене у вигляді степеневого ряду розв'язання містить дві довільні сталі a_0 та a_1. Визначимо їх, використовуючи початкові умови: $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

$$y(0) = a_0 + a_1\cdot 0 - \frac{a_0}{3\cdot 4}\cdot 0 - \frac{a_1}{4\cdot 5}\cdot 0 + \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}\cdot 0 + \cdots = a_0.$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$
$$y' = a_1 - \frac{4a_0}{3\cdot 4}x^3 - \frac{5a_1}{4\cdot 5}x^4 + \frac{8a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^7 + \frac{9a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^8 - \cdots.$$
$$y'(0) = a_1 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{a_1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7}\cdot 0 + \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8}\cdot 0 - \cdots.$$
$$y'(0) = a_1.\ y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Частинний роз'язок, який задовольняє початковим умовам, запишемо у вигляді:

$$y = 1 + 2x - \frac{x^4}{3\cdot 4} - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} - \cdots.$$

РОЗДІЛ 3. РЯДИ ФУР'Є

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+a_1 \cos x+b_1 \sin x+a_2 \cos 2x+b_2 \sin 2x+\cdots+a_n \cos nx+b_n \sin nx+\cdots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \qquad (13)$$

називається ***тригонометричним рядом***, а дійсні числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$ - його коефіцієнтами.

Припустимо, що ряд (13) на відрізку $[-\pi;\pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx). \qquad (14)$$

Важливою ознакою тригонометричних функцій ряду (13) є їх ортогональність на відрізку $[-\pi;\pi]$. Вона розуміється у наступному сенсі: інтеграл на цьому відрізку від добутку двох будь-яких функцій дорівнює:

- нулю, якщо в підінтегральну функцію входять різні функції;
- додатному числу, якщо підінтегральна функція складається з квадрата любої функції.

Обчислимо наступні інтеграли:

а) при $k \neq n; k,n = 0,1,2 \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n}+\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0; \qquad (15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-n)x-\cos(k+n)x]dx=0; \qquad (16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+n)x+\sin(k-n)x]\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-k)x}{n-k}-\frac{\cos(n+k)x}{n+k}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0. \qquad (17)$$

б) при $k=n;\ k,n=1,2,3,\ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi; \qquad (18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi. \qquad (19)$$

в) $$\int_{-\pi}^{\pi} dx=x\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi. \qquad (20)$$

Інтегруємо ряд (14) на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right)dx$$

за формулами (15) - (20) отримуємо, що всі інтеграли, окрім першого,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi,$$

дорівнюють нулю. Звідси знаходимо нульовий коефіцієнт

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (21)$$

Для визначення коефіцієнтів a_n і b_n послідовно помножимо обидві частини (14) на $\cos nx$, $\sin nx$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (22)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (23)$$

Якщо $f(x)$ - парна функція, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0.$$

Якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Зауваження: $\cos\pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n;$
$\sin\pi n = \sin(-\pi n) = 0.$

Приклад 13. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом 2π) функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ 3x-2, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції представлений на рис.24. На відрізку $-\pi \le x \le 0$ функція $f(x)$=0, тому $a_0 = 0, a_n = 0,\ b_n = 0.$ На відрізку $0 \le x \le \pi$ функція $f(x) = 3x-2,$ тому

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi^2}{2}-2\pi\right] = \frac{3\pi-4}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)\cos nx\,dx = \left[\begin{matrix} U = 3x-2; & dU = 3dx \\ dV = \cos nx\,dx; & V = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right] =$$

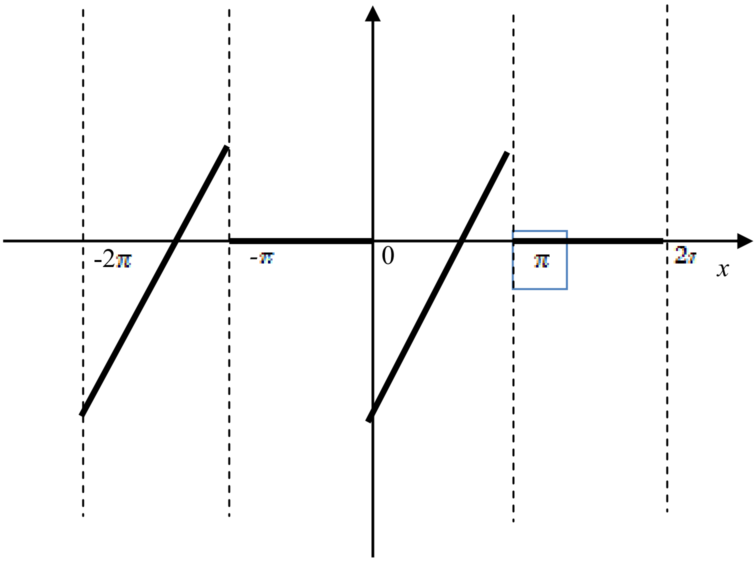


Рис. 24.

$$=\frac{1}{\pi}\left[(3x-2)\frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{n^2}\cdot\cos nx\,\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{n^2}[\cos\pi n-\cos 0]=\frac{3}{\pi n^2}((-1)^n-1);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)\sin nx\,dx=\begin{bmatrix} U=3x-2; & dU=3dx\\ dV=\sin nx\,dx; & V=\dfrac{-1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-(3x-2)\frac{1}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[(2-3\pi)(-1)^n-2+\frac{3}{n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi n}((2-3\pi)(-1)^n-2).$$

Розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$f(x)=\frac{3\pi-4}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx+\frac{1}{\pi n}((2-3\pi)(-1)^n-2)\sin nx\right)$$

$$f(x)=\frac{3\pi-4}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}((-1)^n-1)\cos nx+\frac{1}{n}((2-3\pi)(-1)^n-2)\sin nx\right).$$

Приклад 14. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\pi]$, до визначив її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

$$f(x)=x^2-1$$

Розв'язання. а) Побудуємо графік функції довизначив її парним чином (рис. 25).

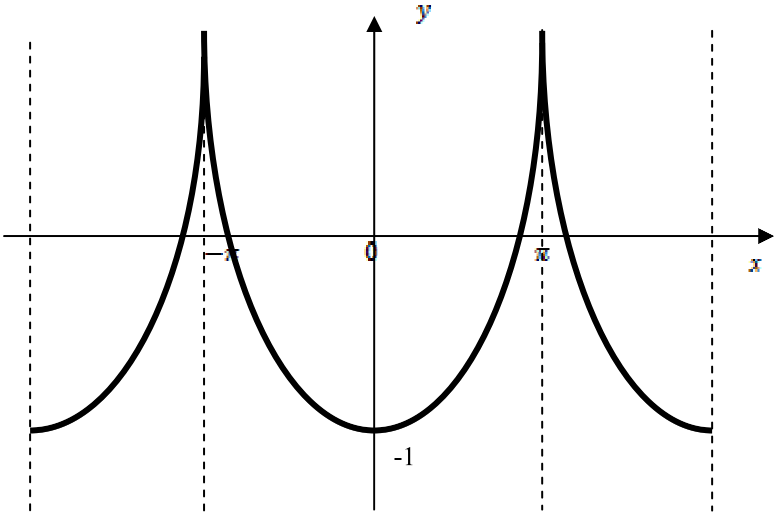


Рис. 25.

Для функції, яка продовжена парним чином коефіцієнти ряду Ф’урьє:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=0.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\pi\right)=\frac{2\pi^2}{3}-2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}U=x^2-1; & dU=2xdx\\ dV=\cos nx\,dx; & V=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2-1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx dx\right]=\left|\begin{matrix}U=x, & dU=dx\\ dV=\sin nx, & V=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left(0-\frac{2}{n}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]\right)=\frac{4}{\pi n^2}\left[\pi(-1)^n-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n;$$

Розклад в ряд Фур’є функції, продовженої парним чином:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

б) Для функції, яка продовжена непарним образом (рис. 26) коефіцієнти ряду Ф’урьє:

$$a_0=0,\qquad a_n=0,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}U=x^2-1; & dU=2xdx\\ dV=\sin nx; & V=\frac{-1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right]=$$

$$= \left| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \cos nx; & V = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + 2\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + 2\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right].$$

Розклад в ряд Фур'є функції, продовженої непарним чином:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right]\frac{\sin nx}{n}.$$

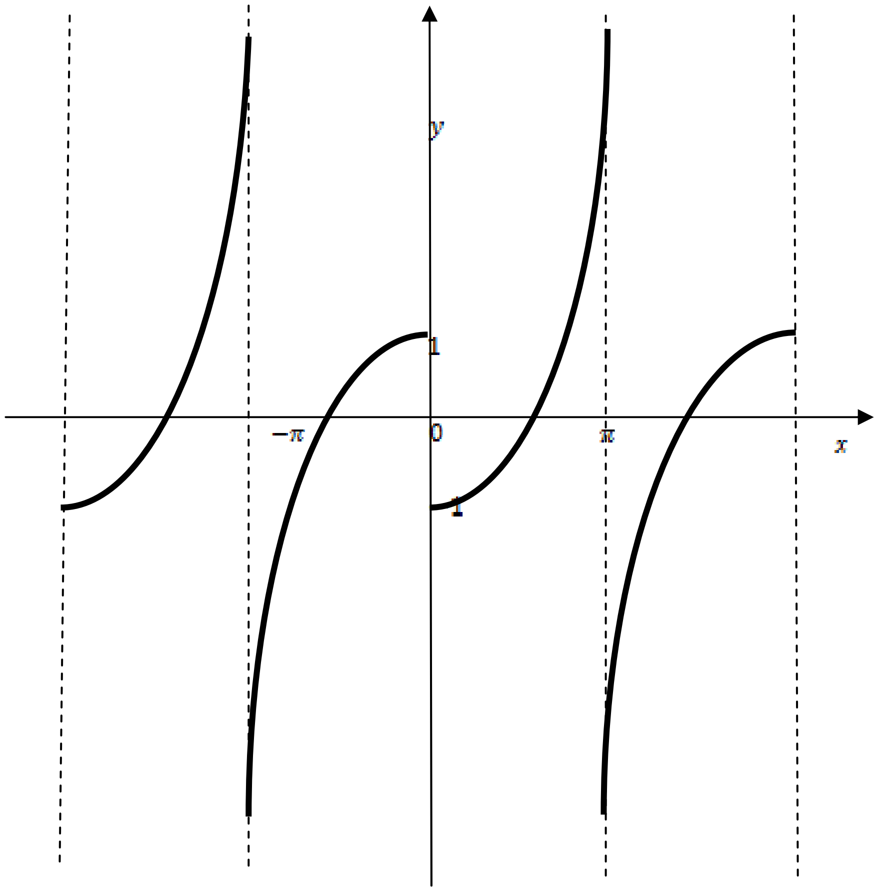


Рис. 26.

Якщо період функції $f(x)$ дорівнює не 2π, а $2l$, то її ряд Фур'є має вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

а коефіцієнти цього ряду a_0, a_n і b_n обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Приклад 15. Розкласти в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x \le -1, \\ 1, & -1 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Функція задана на відрізку $[-2,2]$. Довжина інтервалу інтегрування $2l = 4$, тому $l = 2$. Тому

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{2}(2-x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right|_{-2}^{-1} + x\,\Big|_{-1}^{1} - \left.\frac{(2-x)^2}{2}\right|_{1}^{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\cos\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{1}^{2}(2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx\right].$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

$$1)\ \int_{-2}^{-1}(x+2)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} U = x+2, \quad dU = dx \\ dV = \cos\frac{\pi n x}{2}dx, V = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= (x+2)\frac{2}{\pi n}\sin\left.\frac{\pi n x}{2}\right|_{-2}^{-1} - \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{-1}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left.\frac{\pi n x}{2}\right|_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right].$$

2) $\int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi n}\left[\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{2}\right] = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$

3) $\int_{1}^{2} (2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} U = 2-x, \quad dU = -dx \\ dV = \cos\frac{\pi n x}{2}dx, V = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right| =$

$= (2-x)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} + \frac{2}{\pi n}\int_{1}^{2}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} =$

$= \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\pi n - \cos\frac{\pi n}{2}\right].$

Підставимо найдені значення інтегралів a_n, отримаємо

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right]\right) == \frac{-1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right].$$

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{1}^{2}(2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right]$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

1) $\int_{-2}^{-1}(x+2)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} U = x+2, \quad dU = dx \\ dV = \sin\frac{\pi n x}{2}, V = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right| =$

$= \frac{-2(x+2)}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{-1}\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{-1}$

$= \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\sin\frac{\pi n}{2} - 0\right] = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$

2) $\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-2}{\pi n}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}\right] = 0.$

3) $\int_{1}^{2}(2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} U = 2-x, \quad dU = -dx \\ dV = \sin\frac{\pi n x}{2}dx, V = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right| =$

$= -(2-x)\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} - \frac{2}{\pi n}\int_{1}^{2}\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} =$

$$= \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Підставимо знайдені значення інтегралів b_n, отримаємо

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} + 0 + \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}\right] = 0.$$

Розклад в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n\right]\right) \cos \frac{\pi n x}{2}.$$

Приклад 16. Розкласти в ряд в ряд Фур'є функцію, яка задана графічно (див. рис 27).

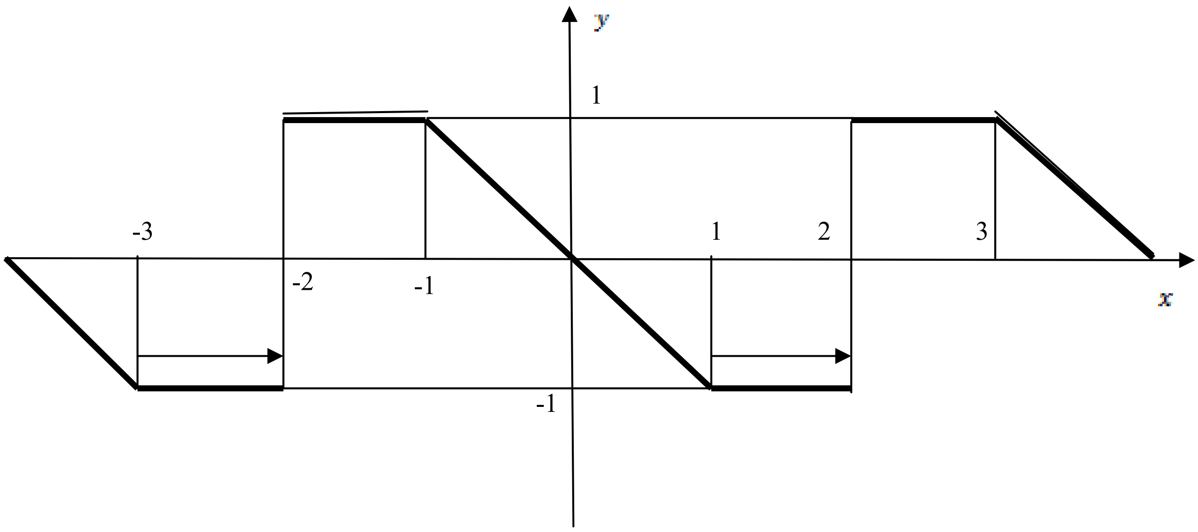


Рис. 27.

Запишемо аналітично функцію ($l = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq -1, \\ -x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} dx - \int_{-1}^{1} x dx - \int_{1}^{2} dx\right] = \frac{1}{2}\left[x \Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} - x \Big|_{1}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0 - 1) = 0,$$

$$a_n - \frac{1}{2}\left[\int_{2}^{-1} \cos \frac{n\pi x}{2} dx - \int_{1}^{1} x \cos \frac{n\pi x}{2} dx - \int_{1}^{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо:

$$1)\ \int_{-2}^{-1} \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left|\begin{matrix} U = x, \quad dU = dx \\ dV - \cos\frac{n\pi x}{2}dx, V - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) = 0;$$

$$3)\ \int_{1}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2} = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

$$b_n - \frac{1}{2}\left[\int_{2}^{-1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{1}x\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] -$$

$$= \left|\begin{matrix} U = x, dU = dx \\ dV = \sin\frac{n\pi x}{2}dx, V = \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) + \left(\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right].$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант 1

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)\,dx .$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_{-2}^0 dx \int_{x^2}^{-2x} (x^2+2y)\,dy .$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint_D \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dxdy ;\ D: x^2+y^2 \le 1.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x+y=4; x\ge 0; y\ge 0;\ z\ge 0;\ z=x^2+y^2+1 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L \frac{\ln x}{x} y^2 dx + (x^2 \ln y + y\ln^2 x)dy ;\ L: x=2; y=3; x=4; y=5$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int_L x^2 dl;\ L:\ x^2+y^2=a^2 ;\ x\ge 0; y\ge 0 .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int_{L_{AB}} x^3 dx + x^2 dy;\ L_{AB}: y=x^2 ;\ A(1;1); B(3;9).$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

$$\text{а) } u_n=\left(\frac{7}{10}\right)^n\cdot n^8;\ \text{б) } u_n=\left(\frac{3n^2+1}{6n^2}\right)^{n^2};\ \text{в) } u_n=\frac{3+2n}{25+n^2};\ \text{г) } u_n=\left(\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)^n .$$

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3};\qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot n!}{(2n)!}x^n .$$

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l: f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0;\\ x+1,\ 0<x\le\pi,\end{cases}$

Варіант 2

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy .$$

2. Обчислити кратний інтеграл: $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x}^{3x} \frac{y^2}{x}\,dy$.

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}; \quad D: x=\sqrt{1-y^2};\ x=0 .$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x=0; y=0; z=0; \quad x+y=2;\ z=x^2+y^2 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint\limits_{L} y(1-x^2)dx+(1+y^2)xdy; \quad L - \text{коло } x^2+y^2=4 .$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int\limits_{L} (x+y)dl;\ L: \Delta OAB - O(0;0); A(1;0); B(1;1) .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int\limits_{L} \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}; L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \pi/2 .$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n = \frac{n!}{5^n (n+3)!}$; б) $u_n = 2^n \Big/ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $u_n = \frac{1}{(n+4)\ln^3(n+4)}$; г) $u_n = \frac{3n-1}{3n^2+4}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $u_n = \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n \cdot 2^n}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n} x^n$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int\limits_{0}^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T = 2l$:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & -\pi \le x \le 0; \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

Варіант 3

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx .$$

2. Обчислити кратний інтеграл: $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx$.

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad D: x^2+y^2 \le \pi^2/9.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x/3 + y/2 + z/4 = 1;\; x=0; y=0; z=0 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint\limits_L (x+y)^2 dx + (x^2+y^2)dy;\; L - \text{трикутник з вершинами } A(1;0);\; B(3;0); C(1;2).$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int\limits_L \frac{dl}{y-x};\; L: A(0;-2); B(4;0).$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int\limits_L ydx + xdy; L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \pi/4.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n = \dfrac{10^n(n+1)}{n!}$; б) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n}\right)^{4n}$; в) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{(2n+5)^3}}$; г) $u_n = \dfrac{n^2}{6n+5}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $u_n = \dfrac{(-1)^n(n+2)}{n^2}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\cdot 4^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\cdot(x-6)^n}{2^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^{0,2} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T = 2l$:

$$f(x) = \begin{cases} 5+x, & -\pi \le x \le 0; \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

Варіант 4

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy .$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2x^2 y\,dy .$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint_D \frac{\left(x^2-y^2\right)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}};\ D: x^2+y^2=1;$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: y=0; z=0; 3x+2y=6;\ 3x+y=3; x+y+z=6 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L (1+xy^2)dx+(\ln x+xy)dy; \quad L: y=x^2; x=1; y=0; x=2.$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int_L \sqrt{e^x+1}dl; L: y=\sqrt{e^x+1};\ A(0;\sqrt{2}); B(1;\sqrt{e+1}) .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int_L \cos^2 x dx+\frac{dy}{y^3}; L: y=tgx; \quad \pi/4 \le x \le \pi/3.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\dfrac{5^n}{4n!}$; б) $u_n=\left(\arcsin\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$; в) $u_n=\dfrac{1}{(5n+4)\ln^2(5n+4)}$; г) $u_n=\dfrac{n+6}{n(n+2)}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n\cdot n^2}$; $\quad$ б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x+3)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, -\pi \le x < 0; \\ 3+2x,\ 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

Варіант 5

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,dy.$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{2x}} (x-y)\,dy.$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}; \quad D: x^2+y^2=4.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: y=\sqrt{x}; y=3\sqrt{x}; z=0;\ x+z=4.$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint\limits_L (y^2-x^2)dx+(x+y^2)dy; \qquad L: x^2+y^2=R^2; y\ge 0; x\ge 0.$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int\limits_L x\sqrt{x^2+1}\,dl;\ L: y=\ln x;\ x_1=1; x_2=4.$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int\limits_L \frac{(x+y)dx+(x-y)dy}{x^2+y^2}; \quad L: \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}; 0\le t\le 2\pi.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\dfrac{4^n(n+1)!}{n^6}$; б) $u_n=\left(\dfrac{2n^2-6n+7}{3n^2-4}\right)^n$; в) $u_n=\dfrac{5+n}{36+n^2}$; г) $u_n=\dfrac{n+1}{n(n+4)}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n(n+6)}{3^n}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\cdot\sqrt[3]{(n+1)^2}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot x^{2n}}{5^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^{0,2}\sqrt{x}\cdot\cos x\,dx.$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, -\pi\le x<0; \\ 0,\ 0\le x\le\pi, \end{cases}$$

Варіант 6

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx .$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_1^2 dy \int_{1/y}^{y} \frac{x}{y^2}\,dx .$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy; \quad D: x^2+y^2=4; x\geq 0, y\geq 0.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x=0; y=0; z=0; 2x+\,+3y=6; z=2y^2 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L \frac{4}{3}y^2(x^2-2)dx+\frac{x^2}{2}(1+x\ y)dy;\ L: x^2+y^2=R^2; y\geq 0 .$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int_L \frac{x^3}{y^2}dl;\ L: xy=1; \quad A(1;1); B(2;1/2) .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int_L (x^3-y^2)dx+xydy; \quad L: y=2^x;\ A(0;1); B(1;2).$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!}$; б) $u_n=\dfrac{2n^3+5}{6n+5}$; в) $u_n=\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}$; г) $u_n=\dfrac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+2)\cdot(n+2)}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n\cdot 6^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{x^{2n}}{4^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^1 x^2\sin x\,dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases}6+3x, & -\pi\leq x\leq 0;\\ 0, & 0\leq x\leq\pi,\end{cases}$$

Варіант 7

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{-y^2} f(x,y)\,dx .$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int\limits_0^{\pi/8} dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} \frac{dy}{\cos^2(x+y)} .$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy ; \quad D: x^2+y^2=9 ;\ x \le 0 .$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x=0; y=3; y=3x; \quad z=2x^2+y^2 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint\limits_L (-x\ln y+y)dx+(x^2y+x)dy ;\ L: y=x^2; x=2;\ y=1 .$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int\limits_L \frac{dl}{x-y};\ L: y=\frac{x}{2}-2 ;\ \ A(0;-2); B(4;0) .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int\limits_L ydx-xdy; L: \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases} ; \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^7$; б) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{25+n^2}}$; в) $u_n = \left(\frac{3n+4}{3n}\right)^{n^2}$; г) $u_n = \frac{5n-9}{5n+6}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n = \frac{(-1)^n(n+4)}{5^n}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-2)^{2n}}{(n+2)^2}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, -\pi \le x < 0; \\ x-3,\ 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

Варіант 8

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-1} f(x,y)\,dy\,.$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_0^2 dy \int_0^{4-2y} (4-x-2y)\,dx\,.$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}\,; \quad D: x^2+y^2=\pi^2/16;\ y \le 0\,.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: y=x^2; x-y+2z+2=0\,.$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L (y+\ln xy)dx+(x^2-xy+5)dy\,;\ L: y=x;\ y=1; x=2\,.$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int_L xydl;\ L: \Delta ABC: A(0;0);\ B(4;0); C(4;2)\,.$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int_{L_{AB}} (x^2+y^2)dx+xydy;\quad L_{AB}: y=e^x; A(0;1); B(1;e).$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\left(\arcsin\dfrac{1}{3n}\right)^n$; б) $u_n=\dfrac{n^n}{(n+5)!}$; в) $u_n=\dfrac{n^2-8}{7n}$; г) $u_n=\dfrac{(2n-4)\cdot 2^n}{n^2-1}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n+3}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n}}{n^3\cdot 2^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}\cdot x^{2n}}{n+4}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx\,.$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases}3-5x, & -\pi \le x \le 0;\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$$

Варіант 9

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_{-2}^{0} dy \int_{-2-y}^{2+y} f(x,y)\,dx .$$

2. Обчислити кратний інтеграл:

$$\int_{0}^{3} dy \int_{y/3}^{y} (4x+y)\,dx .$$

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy ; \quad D: x^2+y^2=16;\ y \ge 0 .$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: x=0; y=3; y=3x;\ z=2x^2+y^2 .$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L (x-2y)dx+(x+y)dy \quad L: x^2+y^2=9 .$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int_L ydl;\ L: y^2=2x;\ A(0;0); B(1;\sqrt{2}) .$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int_{L_{AB}} x^2dx+\frac{dy}{y^2}; L_{AB}: xy=1;\ A(1;1); B(4;1/4) .$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\dfrac{10^n}{(n+3)!}$; б) $u_n=\dfrac{3^n}{5^n(2n+3)}$; в) $u_n=\left(arctg\dfrac{1}{3n+1}\right)^n$; г) $u_n=\dfrac{n^3+3n-5}{6n+5}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^{2n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}\cdot\sqrt{n}}{5^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int_{0,3}^{0,5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx .$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, -\pi \le x < 0; \\ 2+3x,\ 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

Варіант 10

1. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі:

$$\int_1^2 dx \int_1^{2/x} f(x,y)\,dy\,.$$

2. Обчислити кратний інтеграл: $\int\limits_1^e dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} \frac{dy}{x^2+y^2}$.

3. Обчислити кратний інтеграл, використовуючи полярну систему координат:

$$\iint\limits_D 2xy\,dxdy\,; \quad D: x^2+y^2=2;\ y \le 0\,.$$

4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого вказаними поверхнями:

$$V: y=\sqrt[3]{x};\, y=x;\, z \ge 0\,; \quad z=4-x^2-y^2\,.$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою формули Гріна:

$$\oint\limits_L (xy-x^2y+4)dx + (y^2-xy+1)dy\,; \qquad L: y=x^2; x=1; y=0.$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною):

$$\int\limits_L x^2 dl;\ L: y=\ln x;\ \ x_1=\sqrt{3}; x_2=2\sqrt{2}.$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (за координатами):

$$\int\limits_L yxdx+(y+x)dy; L: y=x\,; \quad A(0;0); B(1;1)\,.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди, що задані своїм загальним членом u_n

а) $u_n=\dfrac{4n}{4n^3+3}$; б) $u_n=\dfrac{3\cdot n!}{10^n(2n+5)}$; в) $u_n=\dfrac{(1+e^{-n})^n}{2^n}$; г) $u_n=\dfrac{2n}{(n^2+1)^2}$.

9. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність числовий ряд, який заданий своїм загальним членом u_n: $u_n=\dfrac{(-1)^n\cdot 3^n}{(2n)!}$.

10. Знайти інтервали та області збіжності заданих степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n\cdot(x+2)^{2n}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)^n\cdot x^n}{(n^2+2)^n\cdot 2^n}$.

11. Обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\,.$$

12. Розкласти у ряд Фур'є функцію з періодом $T=2l$:

$$f(x)=\begin{cases} 2-3x, & -\pi \le x \le 0; \\ 0, & 0<x\le \pi, \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа. [Текст]/ М.: Наука, 1985. -383с.
2. **Бермант А.Ф.**. Краткий курс математического анализа. [Текст]/ Араманович И.Г – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
3. **Валєєв К.Г.,** Вища математика / Джалладова І.А. У 2 ч. Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – Київ:КНЕУ, 2002. – 451 с.
4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. Кн.1. Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.
5. **Станішевський С.О.** Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів та виконання контрольної роботи
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 3

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання
усіх спеціальностей)

Укладачі: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна
ШУЛЬГІНА Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск *Л.Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л.П. Вороновська*
С.С. Шульгіна

План 2015, поз.129М

Підп. до друку 19.06.2015 Формат 60х84 /16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3.9
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.